Examen Arithmétique et algèbre commutative mercredi 16 avril 2014
9h00–12h00

Les documents ne sont pas autorisés. Les parties sont indépendantes.

1. Pour les anneaux commutatifs mentionnés ci-dessous, indiquer la *première* classe dans la liste suivante à laquelle appartient l'anneau: (1) corps, (2) anneau principal, (3) anneau factoriel, (4) anneau intègre, (5) anneau commutatif. [Une seule réponse par anneau ; une justification n'est pas requise.]

a. $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$

b. $\mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$

c. $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]$

d. $\mathbf{Z}[\mathbf{i}\sqrt{5}]$

e. $\mathbf{Q}[X, Y, Z]$

f. $\mathbf{R}[X]/(X^2 + X + 1)$

2. Soit $n > 1$ entier, et $A = \mathbf{Z}[\mathbf{i}\sqrt{n}] \subseteq \mathbf{C}$. On veut montrer que A est un anneau avec factorisations : il est intègre et tout élément non nul et non inversible s'écrit comme produit d'éléments irréductibles.

a. Montrer rapidement que A est un anneau commutatif intègre.

b. Vérifier que la norme algébrique N définie par $z \in A \mapsto N(z) = z\overline{z}$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$.

c. Déterminer $A^\times$ et montrer que tout élément de $T = A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ est de norme > 1.

d. Posons $W = \{\, x \in T \mid x$ ne s'écrit pas comme produit d'irréductibles $\}$. Supposons pour une contradiction $W \neq \emptyset$; soit $x \in W$. Justifier qu'il existe $a, b \in A$ tels que $x = ab$, avec $a \notin A^\times$ et $b \notin A^\times$. En déduire que a ou b est élément de W. En utilisant N, aboutir à une contradiction.

3. On note $Q = (X + 2)^2(X^2 + 1) \in \mathbf{R}[X]$.

a. L'anneau quotient $A = \mathbf{R}[X]/(Q)$ est-il intègre?

b. À l'aide de la division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$, montrer que tout élément de A est la classe d'un polynome de degré au plus 3 de $\mathbf{R}[X]$.

c. Déterminer tous les éléments P de A tels que $P^2 = 0$.

d. Montrer que si $P \in A$ vérifie $P^3 = 0$, alors il vérifie aussi $P^2 = 0$.

e. Déterminer l'idéal I de $\mathbf{R}[X]$ engendré par les deux polynômes Q et $X^4 - 1$. En déduire une description de l'anneau quotient $\mathbf{R}[X]/I$.

4. Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{10}]$, sous-anneau de $\mathbf{R}$. On note $N(z)$ la norme d'un élément $z \in A$, donnée par $N(z) = a^2 - 10b^2$ si $z = a + \sqrt{10}b$, et qui vérifie $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tout $x, y \in A$ (admis).

a. Montrer qu'un élément $z \in A$ est inversible si et seulement si $N(z) \in \{1, -1\}$.

b. Donner un exemple d'élément inversible $z \notin \{1, -1\}$.

c. Montrer que pour $a \in \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ la condition $a^2 \in \{3, -3\}$ n'a pas de solutions.

d. À l'aide de la question *c*, montrer que $4 + \sqrt{10}$ est irréductible dans A.

e. Montrer que A n'est pas factoriel (indication : pensez à la norme de l'élément $4 + \sqrt{10}$).

5. Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}\,\mathbf{i}]$ le sous-anneau de $\mathbf{C}$ formé des nombres $s + \sqrt{2}\,\mathbf{i}\,t$ avec $s, t \in \mathbf{Z}$ (c'est un anneau commutatif intègre). On note $N : A \to \mathbf{N}$ la fonction $z \mapsto z\overline{z} = |z|^2$. Comme pour les entiers on veut montrer que A est un anneau euclidien, en l'occurrence avec N comme stathme. Cela veut dire que pour tout $a, b \in A$ avec $b \neq 0$ il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $N(r) < N(b)$.

a. Montrer que dans ce cas il existe $s + \sqrt{2}\,\mathbf{i}\,t \in A$ tel qu'on ait, dans $\mathbf{C}$ (où la division $\frac{a}{b}$ est exacte) :

$$\left|\frac{a}{b} - (s + \sqrt{2}\,\mathbf{i}\,t)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

 sujet continué au verso

b. En prenant dans cette situation $q = s + \sqrt{2}\,\mathbf{i}\,t$, montrer que $r = a - bq$ vérifie $N(r) < N(b)$, et conclure que A est un anneau euclidien.

c. Effectuer la division euclidienne dans A de $4 + 3\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ par $2 - \sqrt{2}\,\mathbf{i}$, et calculer leur pgcd.

d. [bonus] On a vu en TD que l'anneau $B = \mathbf{Z}[\sqrt{3}\,\mathbf{i}]$ n'est pas un anneau principal, ce qui implique que B ne peut pas être un anneau euclidien non plus. Si l'on essaye néanmoins de faire le raisonnement ci-dessus pour B au lieu de A, avec $\sqrt{3}$ à la place de $\sqrt{2}$, qu'est-ce qui change pour empêcher qu'on arrive à la fausse conclusion que B serait un anneau euclidien ?

Fin.