Contrôle continu Arithmétique et algèbre commutative mercredi 26 février 2014
10h00–12h00

Le cours, polycopié ou notes manuscrites, est autorisé comme document.
Les quatre parties sont indépendantes.

1. Soit $\mathbf{Z}[\mathbf{i}] = \{\, a + \mathbf{i}b \mid a, b \in \mathbf{Z} \,\}$ (avec $\mathbf{i}^2 = -1$), l'anneau des entiers de Gauss et soit $A = \mathbf{Z}[\mathbf{i}]/(1+3\mathbf{i})$ où $(1+3\mathbf{i})$ est l'idéal engendré par $1+3\mathbf{i}$.

a. Montrer que dans A on a $\mathbf{i} \equiv 3 \pmod{1+3\mathbf{i}}$ et $10 \equiv 0 \pmod{1+3\mathbf{i}}$.

b. En déduire que dans A tout élément est la classe d'un entier.

c. Calculer le noyau du morphisme naturel $\mathbf{Z} \to A$.

d. Montrer que A est isomorphe à un anneau de la forme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ où n est un entier à déterminer.

2. Soit $n > 0$ un entier.

a. Montrer que n est inversible dans l'anneau $A = \mathbf{Z}[X]/(nX - 1)$.

b. Montrer que A est isomorphe à un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ que l'on déterminera.

3. Soit R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$. On veut montrer que R est un anneau principal.

a. Chaque $\alpha \in R$ est un nombre rationnel, qu'on peut donc écrire comme une fraction *irréductible* $\alpha = \frac{p}{q}$. En utilisant des coefficients de Bezout pour $1 = \mathrm{pgcd}(p, q)$, montrer que $\frac{1}{q} \in R$ aussi.

b. Pour un idéal I de R, montrer que $I \cap \mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}$.

c. Soit I un idéal de R, et $\alpha \in I$ un élément non nul. Montrer que $I \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$, et que α est un multiple dans R du plus petit élément $d > 0$ de $I \cap \mathbf{Z}$.

d. En déduire que dans cette situation $I = dR$, et conclure que R est un anneau principal.

4. Soit $\mathbf{D}$ le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ des nombres décimaux : ceux qui s'écrivent sous la forme $\frac{n}{10^k}$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$.

a. Décrire le groupe $\mathbf{D}^\times$ des éléments inversibles de $\mathbf{D}$.

b. Pour $d \in \mathbf{D}$ on définit $n(d) \in \mathbf{Z}$ ainsi. Si $d = 0$ on pose $n(d) = 0$. Sinon on écrit $d = n \times 10^i$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $i \in \mathbf{Z}$ (l'exposant peut donc être positif ou négatif) et où on exige que n *ne soit pas divisible* par 10 ; alors $n(d)$ est défini comme le nombre n dans cette écriture. Montrer que pour tout d l'entier $n(d)$ est bien défini, et que $n(d) = xd$ pour un élément inversible $x \in \mathbf{D}^\times$.

On veut montrer que $\mathbf{D}$ admet une division euclidienne dans le sens suivant : pour tout $a, b \in \mathbf{D}$ avec $b \neq 0$ il existe un quotient $q \in \mathbf{D}$ et un reste $r \in \mathbf{D}$ tels que $a = qb + r$ et $|n(r)| < |n(b)|$.

c. Montrer, un utilisant la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, que cet énoncé est vrai dans le cas particulier où a, b sont des *entiers* et en plus b n'est pas divisible par 10.

d. Montrer ensuite le cas général de l'énoncé, en se servant du quotient et du reste pour la division dans $\mathbf{D}$ de $n(a)$ par $n(b)$, division qui relève du cas particulier considéré dans le point précédent.

Fin.