Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 jeudi 7 octobre 2017
9h–10h

Consultation du cours écrit, et de vos notes personnelles, est autorisée. Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

Les deux exercices sont indépendants, et auront le même poids.

1. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. On utilisera la notation P' pour la dérivée d'un polynôme $P \in E$ (avec $(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3)' = c_1 + 2c_2X + 3c_3X^2$) et $P[a]$ (avec $a \in K$) pour l'évaluation en $X = a$ du polynôme P ; on admet les faits bien connus que $P \mapsto P'$ et $P \mapsto P[a]$ sont des application linéaires, respectivement $E \to E$ et $E \to K$.

a. Pourquoi $V = \{ P \in E \mid P[0] + P[1] = 0, P[2] = P'[0] \}$ est un sous-espace vectoriel de E? [Vous n'êtes pas obligé d'appliquer directement la définition d'un sous-espace vectoriel, bien que c'est une option valable ; votre argument peut s'appuyer sur des faits généraux bien connus.]

b. Determiner une base de V.

c. Determiner une base du sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}(Q, R, S)$, où $Q = -2 + X + 3X^3$, $R = 1 - 2X - 3X^2$ et $S = 1 + 2X + 5X^2 - 4X^3$.

d. Monter que l'intersection $V \cap W$ est égal au sous-espace $\{0\}$ (qui est de dimension 0). [Indication : plutôt que d'utiliser le résultat de la question *b*, on vous conseille d'utiliser la description $V \cap W = \{ P \in W \mid P[0] + P[1] = 0, P[2] = P'[0] \}$, et de procéder comme dans la question *a*].

2. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

Fin.