Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 3 janvier 2017
14h–17h

Le cours écrit, son résumé, et vos notes personnelles sont autorisés. L'utilisation d'une calculette ou de tout autre appareil électronique est interdite. Tous les résultats du cours ou vus en TD peuvent être utilisés dans vos réponses ; pensez à les mentionner clairement. Les quatre parties sont indépendantes.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit un sous-espace V comme l'image de $\phi^2 + I$.

a. Argumenter sans calcul que V est un sous-espace ϕ-stable.
b. Déterminer une base de V.
c. Trouver la matrice par rapport à cette base de la restriction $\phi|_V$.
d. Montrer que $\phi|_V$ est diagonalisable.
e. Montrer que $\mathbf{R}^4 = V \oplus \ker(\phi^2 + I)$.
f. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

3. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Pourquoi ϕ définit-il, par restriction au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, un endomorphisme $\phi|_V$ de V ?
b. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_{\phi|_V}$ de cette restriction.
c. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ (c'est un multiple de $\chi_{\phi|_V}$), et constater, en le factorisant, que χ_ϕ a une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.
d. Déterminer l'espace propre E_ν pour la racine triple. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
e. Calculer $(M - \nu I)^2$, et déduire du rang de cette matrice la valeur du polynôme minimal μ_ϕ.
f. Décrire explicitement les sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de ϕ ; ils figurent dans une décomposition $\mathbf{C}^4 = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$.
g. Trouver une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation, et détailler la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

 sujet continué au verso

4. Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice pour dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé avec n racines simples, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tous distincts. On appelle "racine carrée de A" toute matrice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

a. Montrer que toute matrice réelle diagonale à coefficients positifs admet une racine carrée.

b. En déduire que si tous les λ_i sont positifs, alors A possède au moins une racine carrée.

c. Pourquoi une racine carrée B de A doit-elle commuter avec A (vérifier $AB = BA$) ?

d. Si $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ vérifie $AC = CA$, montrer que chaque sous-espace propre E_{λ_i} de A est C-stable (plus précisément il est stable par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ donné par $v \mapsto C \cdot v$).

e. En déduire que dans ce cas chaque vecteur propre pour A est aussi vecteur propre pour C (pas forcément pour la même valeur propre), et que C est diagonalisable.

f. Si B est une racine carrée de A, le résultat de la question précédente s'applique pour $C = B$ (d'après la question *c*). Si dans ce cas v est un vecteur propre pour A avec valeur propre λ, que peut-on dire de la valeur propre de v en tant que vecteur propre de B ?

g. En utilisant les questions précédentes, conclure que l'ensemble des racines carrées de A est toujours fini, que son nombre d'éléments est 0, 2^n ou 2^{n-1}, et déterminé par l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ d'une manière qu'on précisera.

Fin.