Corrigé Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 2 novembre 2016
8h15–10h15

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Décrire le sous-espace $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathbf{R}^3$ par un système d'équations linéaires.

$\surd$ *Si $x \in \mathbf{R}^3$ désigne un vecteur inconnu de coordonnées $x_1, \dots, x_3$, l'équation $x \in \ker(f)$ s'écrit $A \cdot x = \vec{0}$, et donne le système*

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

b. Résoudre ce système, et donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

$\surd$ *Après quelques opérations sur les lignes on voit que le système n'a que rang 2, et est équivalent à*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Pour la solution générale on peut donc choisir x_3 librement. Pour obtenir une base on choisit $x_3 = 3$, ce qui donne $x_2 = -2$ et $x_1 = 4$, donc la base a une seule vecteur $(4, -2, 3)$.

c. Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.

$\surd$ *Si C_1, C_2, C_3 sont les trois colonnes de la matrice M, on sait qu'elles forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, on a trouvé la relation $4C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 0$, donc cette famille n'est pas libre. On peut déduire de $C_3 = \frac{1}{3}(-4C_1 + 2C_2)$ que $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et comme $[C_1, C_2]$ est une famille libre, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$. (Il y a beaucoup d'autres bases, et donc d'autres réponses correctes.)*

d. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

$\surd$ *Il suffit de montrer que la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe, car dans ce cas sa dimension est $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$, et donc $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^3$ sera automatique. La somme est directe si et seulement si la réunion de leurs bases est une famille libre, c'est-à-dire $[C_1, C_2, v]$ où C_1, C_2 sont les deux premières colonnes de M et $v = (4, -2, 3)$ est une famille libre. Cela peut se faire par exemple en résolvant le système linéaire correspondant, ou en calculant le déterminant des coordonnées de C_1, C_2 et v, qui vaut 5*

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^2$ associé de façon canonique à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que le vecteurs $b_1 = (1, 2)$ est un vecteur propre de ϕ, et déterminer la valeur propre correspondante.

$\surd$ *On calcule $A \cdot b_1 = (3, 6) = 3b_1$, donc c'est un vecteurs propre pour la valeurs propre 3.*

b. Calculer le polynôme caractéristique de A.

$\surd$ *C'est $\chi_A = (X + 1)(X - 8) - (10)(-2) = X^2 - 7X + 12 = (X - 3)(X - 4)$.*

c. Trouver une autre valeur propre de A et un vecteur propre b_2 correspondant.

$\surd$ *En vue de la décomposition de χ_A cette autre valeur est $\lambda = 4$. Un vecteur propre correspondant est un générateur de $\ker(A - 4I)$ et $(2, 5)$ est un tel générateur*

d. Déduire de ce qui précède que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *On a deux valeurs propres, chacune avec un espace propre de dimension 1; leur somme directe est de dimension 2 et donc égale à l'espace $\mathbf{Q}^2$ tout entier, ce qui veut dire que A est diagonalisable.*

e. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$\surd$ *La matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres convient, et D sera diagonale avec les valeurs propres respectives comme coefficients diagonaux. D'après ce qui précède*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

f. Donner une formule pour A^n avec $n \in \mathbf{N}$, dans laquelle chacun de ses 4 coefficients est explicité.

$\surd$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 \times 3^n - 4 \times 4^n & -2 \times 3^n + 2 \times 4^n \\ 10 \times 3^n - 10 \times 4^n & -4 \times 3^n + 5 \times 4^n \end{pmatrix}$$

3. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 2a_n + 3a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.

$\surd$ $0, 1, 3, 11, 39, 139, 495$

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$\surd$ *Comme indiqué dans le cours, les lignes sauf la dernières sont celles de la matrices identité un cran plus bas, et la dernière ligne représente la relation de récurrence:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

$\surd$ *Le polynôme qui exprime que la suite géométrique de raison λ vérifie la relation récurrence est $X^2 - (2 + X) = X^2 - X - 2$. Alternativement on peut prendre le polynôme caractéristique*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -2 & X - 3 \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 2,$$

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

$\surd$ *En utilisant la formule pour les racines d'un polynôme de degré 2 on trouve $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ pour ces racines, et elles donnant la factorisation $X^2 - 2X - 3 = (X - \frac{3+\sqrt{17}}{2})(X - \frac{3-\sqrt{17}}{2})$. Abrégeons désormais $\lambda_+ = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\lambda_- = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ ces deux racines pour réduire la taille des expressions. Pour chacune des valeurs propres λ, on a un vecteur propre $\binom{1}{\lambda}$, donc concrètement $\binom{1}{\lambda_+}$ et $\binom{1}{\lambda_-}$.*

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

$\surd$ *Puisque les deux vecteurs propres donnent lieu, and prenant leur coefficients comme valeurs initiales à la place de a_0, a_1, aux suites géométriques $(\lambda_+^n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\lambda_-^n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifient la même relation de récurrence, il s'agit de chercher la combinaison linéaire $(x\lambda_+^n + y\lambda_-^n)_{n \in \mathbf{N}}$ de ces suites dont les deux termes initiaux sont $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Cela donne les équations $x + y = 0$ et $\lambda_+ x + \lambda_- y = 1$. Le système donne $(\lambda_+ - \lambda_-)x = 1$ soit $\sqrt{17}x = 1$ et donc $x = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Le terme général est donc $a_n = \frac{1}{\sqrt{17}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n)$, dans lequel on peut substituer pour λ_+, λ_- les expressions explicites dont il sont une abréviation.*

Fin.