Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 14 juin 2016
14h–17h

Le cours écrit et vos notes personnelles sont autorisés. L'utilisation d'une calculette ou de tout autre appareil électronique est interdite. Tous les résultats du cours, ou obtenus dans les exercices de TD, peuvent être cités et utilisés sans démonstration. Les 4 parties sont indépendantes.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, et $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ la base canonique de cet espace. On considère l'application linéaire $f : E \to E$ donnée par $f(c_0 + c_1X + c_2X^2) = (2c_0 + 2c_1 - c_2) + (-c_0 - 2c_1 + 3c_2)X + (c_1 - c_2)X^2$.
a. Donner la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{E}$.
b. Montrer que pour tout polynôme $P \in E$ la valeur $P[1]$ de P en $X = 1$ est égale à $f(P)[1]$.
c. Soit $V = \{ P \in E \mid P[1] = 0 \}$ le sous-espace de E des polynômes s'annulant en $X = 1$. Montrer que V est f-stable, c'est-à-dire que $f(V) \subseteq V$.
d. Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace V.
e. Par restriction, f définit un endomorphisme du sous-espace V, qu'on désignera par $f|_V$. Donner le polynôme caractéristique de $f|_V$ (il est de degré $2 = \dim V$) et conclure que $f|_V$ est diagonalisable.
f. Montrer que f n'admet aucun vecteur propre en dehors du sous-espace V [indication : on pourra déduire de la question *b* ce le seul candidat pour la valeur propre correspondante est $\lambda = 1$] et conclure que f n'est pas diagonalisable.

3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ correspondant de manière canonique à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ.
b. Déterminer les sous-espaces propres de ϕ, et constater que ϕ n'est pas diagonalisable.
c. Trouver pour chacune des valeurs propres la dimension de son sous-espace caractéristique.
d. Dresser une courte liste des possibilités pour le polynôme minimal de ϕ, et décider par un calcul laquelle des possibilités est la bonne.
e. Trouver pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$, choisie ainsi : commencer avec une base du sous-espace propre E_λ, puis (si $\tilde{E}_\lambda$ est différent de E_λ) l'étendre à une base de $\mathrm{Ker}((B - \lambda\mathbf{I})^2)$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une base de $\mathrm{Ker}((B - \lambda\mathbf{I})^m) = \tilde{E}_\lambda$.
f. Soit $\mathcal{B}$ la base de E formée en combinant les bases trouvées dans la question précédente. La matrice $T = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\phi)$ est triangulaire supérieure (pourquoi ?) ; déterminer T.

Fin.