Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 4 janvier 2016
14h–17h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ -6 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-5 & -8 & 2 \\ 6 & X+5 & -6 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3+X^2(-5+5-3)+X(\left|\begin{smallmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 5 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} 5 & -6 \\ -4 & -3 \end{smallmatrix}\right|) - \det A = X^3-3X^2+X(23+15-39) - -3 = X^3-3X^2-X+3$. *C'est un peu plus simple si l'on ajoute la première colonne à la dernière, puis soustrait la dernière ligne de la première, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -8 & X-3 \\ 6 & X+5 & 0 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-5 & -4 & 0 \\ 6 & X+5 & 0 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix} = (X^2-1)(X-3).$$

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 3 *de* χ_A*. Effectivement* $-1, 1$ *et* 3 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3-3X^2-X+3 = (X+1)(X-1)(X-3)$.

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Les trois racines de* χ_A *sont des valeurs propres de* ϕ*, et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins* 1 *(en fait exactement* 1*, mais cela ne sera pas utilisé). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins* $1+1+1=3$*, d'où elle remplit l'espace* E *qui est de dimension* 3*, et* ϕ *est diagonalisable.*
Pour $\lambda=-1$*,* $\lambda=1$ *et* $\lambda=3$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A-\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -6 & -6 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -6 & -8 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune est de rang 2 *(il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs* $(-5,3,-3)$*,* $(-3,1,-2)$*, et* $(1,0,1)$*, qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda=-1$*, pour* $\lambda=1$ *et pour* $\lambda=3$.

d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On choisit les trois vecteurs* $(1,2,4)$, $(0,1,1)$, *et* $(-1,2,1)$ *comme base* $\mathcal{B}$, *pour lequel la matrice de passage* P *de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ *est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres* $-1, 1, 3$ *on aura* $A = PDP^{-1}$ *pour la matrice diagonale* D *de coefficients diagonaux* $-1, 1, 3$. *Alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* D^n *est la matrice diagonale à coefficients diagonaux* $(-1)^n, 1^n, 3^n$, *ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -5a+9b-3c & -1a+6b-c & 5a-9b+4c \\ 3a-3b & 3a-2b & -3a+3b \\ -3a+6b-3c & -3a+4b-c & 3a-6b+4c \end{pmatrix}$$

où $a = (-1)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = (-3)^n$.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<3}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré moins de 3, qui est un sous-espace de $\mathbf{R}[X]$. Pour un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ on désigne par P' son polynôme dérivé, et on définit une application linéaire $f : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ par $f(P) = P + (X-1)P' + (X^2+2)P''$ (on admet la linéarité).

a. Montrer que la restriction à E de f définit un endomorphisme ϕ de E (c'est-à-dire montrer que pour $P \in E$ on aura toujours $f(P) \in E$, ce qui permet de définir $\phi : E \to E$ par $\phi(P) = f(P)$), et donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de cet endomorphisme par rapport à la base (canonique) $\mathcal{E} = [1, X, X^2]$ de E.

$\surd$ *Dans un premier temps il faut montrer que pour* $P \in E$ *on a* $f(P) \in E$, *ce qui découle du fait que les 3 termes de l'expression* $P + (X-1)P' + (X^2+2)P''$ *sont tous de degré* < 3 *quand* $P \in E$ *(c'est-à-dire* $\deg(P) < 3$*). Ensuite on calcule* $f(1) = 1$, $f(X) = X + (X-1) = 2X-1$ *et* $f(X^2) = X^2 + (X-1)2X + (X^2+2)2 = 5X^2 - 2X + 4$, *dont les coefficients (pris dans l'ordre de la base* $\mathcal{E}$*) donnent ceux des trois colonnes de la matrice de* ϕ *par rapport à* $\mathcal{E}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. On pose $V = \{ P \in E \mid P'' = 0 \}$ et $W = \mathrm{Vect}(Q)$ pour le polynôme $Q = 6X^2 - 4X + 7 \in E$. Montrer que ce sont deux sous-espaces ϕ-stables de E.

$\surd$ *Le sous-espace* V *est celui des polynômes de degré* < 2, *et pareillement à la question précédente on montre que* $\deg(P) < 2$ *entraîne* $\deg(f(P)) < 2$, *donc* $f(P) = \phi(P) \in V$. *Ou alternativement on peut montrer que* $V)\,\mathrm{Vect}(1, X)$, *et que* $\phi(1), \phi(X) \in V$. *Pour* W *il suffit de montrer que* $\phi(Q) \in W$, *et effectivement* $\phi(6X^2 - 4X + 7) = 30X^2 - 20X + 35 = 5Q \in W$.

c. Montrer que $E = V \oplus W$.

$\surd$ *Puisque* $\dim(V) = 2$ *et* $\dim(W) = 1$, *il suffira de montrer que la somme* $V + W$ *est directe, car alors* $\dim(V \oplus W) = 2 + 1 = 3 = \dim(E)$ *montrera que* $V \oplus W = E$. *Or une somme de deux sous-espaces est directe si et seulement si leur intersection est réduite à* $\{0\}$ *; puisque* $Q'' = 12 \neq 0$ *on a* $\lambda Q \in V \Rightarrow \lambda = 0$ *(pour* $\lambda \in \mathbf{R}$*) donc* $W \cap V = \{0\}$ *comme voulu.*

3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ correspondant de manière canonique à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de ϕ.

$\surd$ $\chi_B = (X+1)(X^3-3X^2+4) = (X+1)^2(X-2)^2 = X^4-2X^3-3X^2+4X+4$. *Les valeurs propres sont* -1 *et* 2*, tous deux racines doubles de* χ_B*.*

b. Déterminer les sous-espaces propres de ϕ, et constater que ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Le sous-espace propre pour* $\lambda = -1$ *est* $\ker(B+\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}((1,2,-1,0))$ *qui n'est pas de dimension* 2 *(la multiplicité de* -1 *comme racine de* χ_B*), d'où* B *n'est pas diagonalisable. Pour* $\lambda = 2$ *on trouve le sous-espace propre* $\ker(B+2\mathbf{I}) = \mathrm{Vect}((1,2,0,0),(0,-3,1,0))$ *qui est de dimension* 2 *(ce sous-espace propre est égal à son sous-espace caractéristique).*

c. Trouver pour chacune des valeurs propres la dimension de son sous-espace caractéristique.

$\surd$ *Ces dimensions sont les multiplicités des valeurs propres comme racine de* χ_B*, donc aussi bien pour* $\lambda = -1$ *que pour* $\lambda = 2$ *cette dimension est* 2*.*

d. Dresser une courte liste des possibilités pour le polynôme minimal de ϕ, et décider par un calcul laquelle des possibilités est la bonne.

$\surd$ *En principe les quatre diviseurs unitaires de* χ_B *sont des candidats pour le polynôme minimal, c'est-à-dire* $(X+1)(X-2)$*,* $(X+1)(X-2)^2$*,* $(X+1)^2(X-2)$*, et* $(X+1)^2(X-2)^2$*. Mais on sait en comparant les réponses aux questions b et c que* $E_{-1} \neq \tilde{E}_{-1}$ *pendant que* $E_2 = \tilde{E}_2$*, donc pour* $\lambda = -1$ *la multiplicité de comme racine de* μ_ϕ *n'est pas* 1*, pendant que pour* $\lambda = 2$ *cette multiplicité est* 1*. Donc* $(X+1)^2(X-2)$ *est la bonne possibilité.*

e. Trouver pour chaque valeur propre λ une base du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$, choisie ainsi : commencer avec une base du sous-espace propre E_λ, puis (si $\tilde{E}_\lambda$ est différent de E_λ) l'étendre à une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^2)$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une base de $\mathrm{Ker}((B-\lambda\mathbf{I})^m) = \tilde{E}_\lambda$.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 2$ *la base trouvée* $[(1,2,0,0),(0,-3,1,0)]$ *de* $E_2 = \tilde{E}_2$ *convient. Pour* $\lambda = -1$ *par contre, il faudra étendre la base* $[(1,2,-1,0)]$ *à une base de* $\tilde{E}_{-1}$*. En résolvant le système pour* $\ker((B+\mathbf{I})^2)$*, on trouve par exemple la solution supplémentaire* $(0,0,-1,3)$*, pour donner la base ordonnée* $[(1,2,-1,0),(0,0,-1,3)]$*.*

f. Soit $\mathcal{B}$ la base de E formée en combinant les bases trouvées dans la question précédente. La matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est triangulaire supérieure (pourquoi ?) ; déterminer T.

$\surd$ *Avec nos choix on a* $\mathcal{B} = [(1,2,0,0),(0,-3,1,0),(1,2,-1,0),(0,0,-1,3)]$*. La matrice est diagonale en 2 blocs* 2×2 *selon la décomposition* $E = \tilde{E}_2 \oplus \tilde{E}_{-1}$*, Le bloc pour* $\lambda = 2$ *est diagonal, avec coefficients diagonaux* $2,2$*. Le bloc pour* $\lambda = -1$ *est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux* $-1,-1$*. Le seul coefficient qui n'est pas déterminé par ces conditions dépend du choix du dernier vecteur* v *de base de* $\tilde{E}_{-1}$*, et peut être trouvé en exprimant* $B \cdot v$ *sur cette base. Pour notre choix* $v = (0,0,-1,3)$ *on a* $B \cdot v = (6,12,-5,-3) = 6(1,2,-1,0) - v$*, donc le coefficient est* 6*. Donc (pour nos choix) on a*

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit E le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^4$, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -27 & -17 & -1 \\ 1 & -9 & -4 & 3 \\ -1 & 9 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Soit $b_0 = (1,0,0,0) \in E$, et $b_i = \phi^i(b_0)$ pour $i = 1,2,3$. Calculer ces vecteurs, et montrer que $\mathcal{B} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ est une base de E. [Les coefficients c de ces vecteurs vérifient tous $|c| < 5$; si vos calculs ne confirment pas ceci, c'est une indication qu'ils sont erronés.]

$\surd$ *On a $b_1 = (3,1,-1,0)$, $b_2 = (-1,-2,3,-2)$, $b_3 = (2,-1,2,-1)$. L'échelonnement de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donne} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est visiblement inversible, donc $\mathcal{B}$ est bien une base.

b. Calculer le vecteur $\phi(b_3)$, et donner ensuite ses coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

$\surd$ *On calcule $\phi(b_4) = (0,0,0,-1)$. Pour l'exprimer dans la base $\mathcal{B}$, on résout le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour trouver les coordonnées $x = 0, y = 1, z = 1, t = -1$, donc $\phi(b_4) = b_1 + b_2 - b_3$.

c. Déterminer la matrice $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

$\surd$ *Les colonnes de M' contiennent les coordonnées de $\phi(b_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $j = 0,1,2,3$. Pour les trois premières $\phi(b_j) = b_{j+1}$ d'après la définition des b_j, et pour la dernière colonne voir la question b. Donc*

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d. Calculer le polynôme minimal μ_ϕ de ϕ, ainsi que son polynôme caractéristique χ_ϕ. [Ce calcul est plus facile si on utilise la matrice M' plutôt que la matrice M.]

$\surd$ *On peut calculer ces polynômes en utilisant une matrice de ϕ par rapport à n'importe quelle base, donc on peut utiliser la matrice M'. Or M' est la matrice compagnon du polynôme $P = X^4 + X^3 - X^2 - X$, donc P est égal à la fois à μ_ϕ et à χ_ϕ (exercice fait en TD).*

e. Montrer que ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *On factorise $P = X(X^3 + X^2 - X - 1) = X(X-1)(X^2 + 2X + 1) = X(X-1)(X+1)^2$. Ce polynôme a une racine double -1, et comme c'est le polynôme minimal de ϕ , cela montre que ϕ n'est pas diagonalisable (corollaire 2.4.3 du cours, par contraposée).*

f. Donner pour chaque valeur propre λ de ϕ les dimensions du sous-espaces propre E_λ et du sous-espace caractéristique $\tilde{E}_\lambda$.

$\surd$ *Les dimensions des sous-espaces caractéristiques sont les multiplicités comme racine du polynôme caractéristique P, donc $\dim(\tilde{E}_0) = 1$, $\dim(\tilde{E}_1) = 1$, et $\dim(\tilde{E}_{-1}) = 2$. Pour les sous-espaces propres, c'est le même sous-espace que le caractéristique quand la dimension de ce dernier est 1, donc pour $\lambda = 0,1$. Pour $\lambda = -1$ on a $E_{-1} \neq \tilde{E}_{-1}$ (sinon ϕ serait diagonalisable) donc $\dim(E_{-1}) = 1$ (comme les autre sous-espaces propres).*

g. Donner une base de chacun des sous-espaces de la question précédente.

$\surd$ $E_0 = \mathrm{Vect}((3,4,-6,3))$, $E_1 = \mathrm{Vect}(3,-4,7,-5))$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,2,-3,1))$ *et pour le seul sous-espace caractéristique différent* $\tilde{E}_{-1} = \mathrm{Vect}((1,2,-3,1),(2,-1,2,0))$

 Fin.