Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mardi 6 octobre 2015
10h30–11h30

1. On se place dans l'espace $E = K[X]_{<4}$ de polynômes en X de degré au plus 3. En notant $P[a]$ l'évaluation de $P \in E$ (qui est un polynôme) en $X = a$ (où $a \in K$ est un scalaire), et on définit le sous-espace $V = \{ P \in E \mid P[2] + 2P[-1] = 0 \}$ de E (on admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel). On considère les quatre vecteurs $P_1, \ldots, P_4 \in E$ suivants

$$\begin{aligned} P_1 &= 3X \\ P_2 &= X^2 + X - 2 \\ P_3 &= X^3 + X^2 + X - 4 \\ P_4 &= X^3 - X^2 \end{aligned}$$

a. Montrer que $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4) \subseteq V$.

$\surd$ *Puisque* $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ *est formé des combinaisons linéaires de* $[P_1, \ldots, P_4]$, *et* V *est un sous-espace vectoriel, donc fermé pour les combinaisons linéaires, il suffit de vérifier* $P_i \in V$ *pour* $i = 1, 2, 3, 4$. *Or* $P_1[2]+2P_1[-1] = 2-2 = 0$, $P_2[2]+2P_2[-1] = 4-4 = 0$, $P_3[2]+2P_3[-1] = 10-10 = 0$ *et* $P_4[2] + 2P_4[-1] = 4 - 4 = 0$, *donc c'est bon.*

b. Montrer que $f : (c_1, c_2, c_3, c_4) \mapsto c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4$ définit une application linéaire $K^4 \to E$.

$\surd$ *C'est un exemple d'une application défini sur* K^n *(pour* $n = 4$*) qui utilise les composantes du* n*-uplet pour former une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs de* E *(ici* $[P_1, \ldots, P_4]$*), et de telles applications sont toujours linéaires* $K^n \to E$.

c. Donner une équation vectorielle avec 4 inconnues qui exprime qu'un polynôme $Q = aX^3+bX^2+cX + d \in E$ est dans $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ (donc l'équation admet une solution si et seulement si $Q \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$; il s'agit juste d'expliciter la définition). Donner ensuite un système de 4 équations (scalaires) en ces 4 inconnues qui soit équivalent à cette équation vectorielle.

$\surd$ *L'équation est simplement* $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 + c_4P_4 = Q$, *avec* $c_1, \ldots, c_4$ *comme les 4 inconnues. En prenant les coefficients de* $X^3, X^2, X, 1$ *cela donne le système*

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 &= a \\ c_2 + c_3 - c_4 &= b \\ 3c_1 + c_2 + c_3 \phantom{{}-c_4} &= c \\ -2c_2 - 4c_3 \phantom{{}-c_4} &= d \end{aligned}$$

d. Donner une condition en termes de a, b, c, d pour que $Q \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ (c'est-à-dire pour que le système admette au moins une solution).

$\surd$ *On échelonne facilement le système, dont le résultat est*

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 + c_3 \phantom{{}-c_4} &= c \\ c_2 + c_3 - c_4 &= b \\ c_3 + c_4 &= a \\ 0 &= 2a + 2b + d \end{aligned}$$

Ce système possède des solution si et seulement si $2a + 2b + d = 0$.

e. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = V$. [La question précédente est utile ici.]

$\surd$ *Puisque* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ *par définition, on a déjà montré* $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$ *dans le point a. Pour montrer* $V \subseteq \mathrm{Im}(f)$, *il suffit de montrer, d'après le point d que si* $Q \in V$ *alors* $2a+2b+d = 0$. *Or* $Q \in V$ *veut dire* $Q[2] + 2Q[-1] = 0$, *c'est-à-dire* $8a + 4b + 2c + d + 2(-a + b - c + d) = 0$, *ou* $6a + 6b + 3d = 0$, *ce qui donne après division par 3 effectivement* $2a + 2b + d = 0$.

f. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.

$\surd$ *Il s'agit de trouver les solutions du système homogène associé au système des points précédents. Il est clair dans la forme échelonnée qu'il y a une variable secondaire, donc un paramètre pour les solutions, pour lequel on peut prendre* c_4. *On trouve alors la solution générale* $(-\frac{1}{3}c_4, 2c_4, -c_4, c_4) = c_4(-\frac{1}{3}, 2, -1, 1)$, *alors* $\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Vect}\big((-\frac{1}{3}, 2, -1, 1)\big) = \mathrm{Vect}\big((-1, 6, -3, 3)\big)$.

g. Trouver une base de V.

$\surd$ *L'élément* $(-1, 6, -3, 3)$ *du noyau trouvé correspond à la relation* $-P_1 + 6P_2 - 3P_3 + 3P_4 = 0$. *Ainsi (car les quatre coefficients sont non nuls) chacun des vecteurs de la famille* $[P_1, \ldots, P_4]$, *qui est génératrice de* $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4) = V$ *par définition, peut être écrit comme combinaison linéaire des trois autres, mais une fois un vecteur supprimé il n'y a plus aucune relation non triviale entre les trois vecteurs restants. On peut donc prendre comme base une famille formée de* 3 *des vecteurs* P_1, P_2, P_3, P_4, *n'importe lesquels, par exemple* $[P_1, P_2, P_3,]$ *ou* $[P_2, P_3, P_4]$.

2. Trouver une base du sous-espace de K^4 des vecteurs $(x_1, \ldots, x_4)$ qui vérifient le système d'équations linéaires homogènes suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \phantom{{}-x_4} = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$\surd$ *On peut résoudre ce système par exemple en le réduisant à*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \phantom{{}-x_4} = 0, \\ \phantom{x_1 - {}} 4x_2 - 8x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

après laquelle on peut choisir x_3, x_4 *comme variables secondaires, pour trouver comme générateurs du sous-espace des solutions* $(x_1, \ldots, x_4) = (5, 2, 1, 0)$ *et* $(x_1, \ldots, x_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1)$ *(donc pour la base demandée on peut prendre, après avoir chassé les dénominateurs,* $[(5, 2, 1, 0), (2, 1, 0, 4)]$*), mais on pourra également choisir par exemple* x_2, x_3 *comme variables secondaires, et dans ce cas on trouvera la base* $[(2, 1, 0, 4), (1, 0, 1, -8)]$. *D'autre solutions correctes encore sont possibles.*

3. Décrire le sous-espace de K^4 engendré par les vecteurs $(1, -1, -1, 0)$, $(0, 5, -2, 1)$ et $(1, -2, 1, 1)$ par un système d'équations, dans lequel les inconnues sont les coordonnées x, y, z, t d'un vecteur $(x, y, z, t) \in K^4$ (le nombre d'équations nécessaires est à déterminer, la possibilité de trouver un système à une seule équation, voire à aucune équation, n'étant pas exclue).

$\surd$ *Les coefficients* c_1, c_2, c_3, c_4 *d'une équation* $c_1x + c_2y + c_3z + c_4t = 0$ *doivent vérifier le système*

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_3 \phantom{{}+c_4} &= 0 \\ 5c_2 - 2c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de ce système forment un sous-espace de dimension 1 *dont* $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (5, 2, 3, -4)$ *est une générateur. La réponse à la question est donc un système à une équation, pour lequel on peut prendre* $5x + 2y + 3z - 4t = 0$.

Fin.