Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 5 janvier 2015
14h–17h

Le résumé du cours est le seul document autorisé. L'utilisation d'une calculette ou de tout autre appareil électronique est interdite. Les parties sont indépendantes. Les espaces vectoriels considérés sont toujours sur un corps K ; dans certaines parties K est spécifié plus précisément.

Le sujet est assez long (pour permettre des questions dont le degré de difficulté est assez varié). Le barème en tiendra compte, et attribuera au moins un point à chaque question.

1. Soit $K = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}^2$, et $\phi : E \to E$ l'application linéaire donnée par $\phi\left(\binom{x}{y}\right) = \binom{y}{10x+3y}$.

a. Donner la matrice de ϕ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

b. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de ϕ par rapport à $\mathcal{B}$ soit diagonale.

c. On définit une suite de vecteurs $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $v_0 = \binom{1}{0}$ et $v_{i+1} = \phi(v_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Exprimer explicitement le terme général v_n en fonction de n.

2. Soit $K = \mathbf{Q}$, $E = \mathbf{Q}^4$, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 8 & a \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbf{Q}$ est un paramètre.

a. Expliquer pourquoi le polynôme caractéristique χ_A ne dépend pas de la valeur de a.

b. Calculer χ_A, et montrer qu'il est scindé avec une racine double $\lambda = 1$.

c. Montrer que pour $a = -2$ l'endomorphisme ϕ est diagonalisable, et indiquer une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation, c'est-à-dire tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit une matrice diagonale.

d. Montrer que si $a \neq -2$, alors ϕ n'est pas diagonalisable.

e. Dans le cas $a \neq -2$, déterminer tous les sous-espaces propres de ϕ, ainsi que son sous-espace caractéristique $\tilde{E}_1$ pour la valeur propre $\lambda = 1$.

3. Soit U la matrice (dépendant de paramètres $a, b, c, d, t, u, v, w \in K$) :

$$U = \begin{pmatrix} a & u & 0 & t \\ 0 & b & v & 0 \\ 0 & 0 & c & w \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

a. Quel est le polynôme caractéristique de U ? Quelles sont les valeurs propres de U ?

b. À quelles conditions sur les paramètres la matrice U est-elle diagonalisable dans les cas suivants :

i. a, b, c, d sont distincts ?

ii. $a = b = c = d$?

iii. $a = b \neq c = d$?

4. Soit $K = \mathbf{C}$, $E = \mathbf{C}[X]_{<5}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré strictement inférieur à 5. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par $\phi(P) = P[X+1]$, c'est-à-dire c'est l'opération qui consiste à substituer $X+1$ pour X (par exemple, $\phi(X^2 - 7X + 2) = (X+1)^2 - 7(X+1) + 2 = X^2 - 5X - 4$.)

a. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{E} = [1, X, X^2, X^3, X^4]$ de E.

b. Montrer que ϕ possède une unique valeur propre λ, à savoir $\lambda = 1$.

c. Décrire $\mathrm{Ker}((\phi - \mathrm{id})^k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

sujet continué au verso

5. Soit $K = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}^4$, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Pour le second vecteur $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ de $\mathcal{E}$, trouver le plus petit $d \in \mathbf{N}$ tel que les vecteurs $e_2, \phi(e_2), \ldots, \phi^d(e_2)$ forment une famille liée. Donner $P \in K[X]$ unitaire de degré d tel que $P[\phi](v) = 0$.

b. Calculer la matrice de $P[\phi]$, et trouver ensuite le polynôme minimal μ de ϕ sous la forme $\mu = PQ$.

c. Est-ce que ϕ est diagonalisable ? (Attention : on a $K = \mathbf{R}$.)

d. Montrer, en considérant uniquement les polynômes P, Q, que $E = \mathrm{Ker}(P[\phi]) \oplus \mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

Dans le reste de l'exercice, il s'agit d'illustrer cette décomposition.

e. Méthode 1.

i. Calculer des bases de $\mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

ii. Pour un vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, expliciter l'écriture $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $v_2 \in \mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

f. Méthode 2.

i. Trouver (éventuellement à l'aide de coefficients de Bézout) des polynômes R_1, R_2 tels que

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv 1 \pmod{P}, & R_2 &\equiv 0 \pmod{P}, \\ R_1 &\equiv 0 \pmod{Q}, & R_2 &\equiv 1 \pmod{Q}. \end{aligned}$$

ii. On pose $\pi_1 = R_1[\phi]$ et $\pi_2 = R_2[\phi]$. Montrer sans calcul que les conditions établies dans le point *i* entraînent $\mathrm{Im}(\pi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\mathrm{Im}(\pi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(Q[\phi])$, ainsi que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_E$.

iii. Calculer π_1 et π_2 et vérifier les relations du point *ii*.

iv. Conclure que $v = \pi_1(v) + \pi_2(v)$ avec $\pi_1(v) \in \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\pi_2(v) \in \mathrm{Ker}(Q[\phi])$, pour tout $v \in \mathbf{R}^4$.

Fin.