Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 5 janvier 2015
14h–17h

1. Soit $K=\mathbf{R}$, $E=\mathbf{R}^2$, et $\phi : E \to E$ l'application linéaire donnée par $\phi(\binom{x}{y})=\binom{y}{10x+3y}$.

a. Donner la matrice de ϕ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

$\surd$ *Puisque* $\phi(\binom{1}{0})=\binom{0}{10}$ *et* $\phi(\binom{0}{1})=\binom{1}{3}$ *la matrice demandée est* $A=\begin{pmatrix}0&1\\10&3\end{pmatrix}$.

b. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de ϕ par rapport à $\mathcal{B}$ soit diagonale.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique est* $X(X-3)-10=X^2-3X-10=(X-5)(X+2)$ *(au besoin on peut trouver ses racines* $5,-2$ *comme* $\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}$*). En calculant la noyau de* $A-\lambda I$ *pour* $\lambda=5,-2$ *on trouve qu'ils sont les droites vectorielles engendrées respectivement par* $\binom{1}{5}$ *(pour* $\lambda=5$*) et par* $\binom{1}{-2}$ *(pour* $\lambda=-2$*). Donc on peut prendre* $\mathcal{B}=[\binom{1}{5},\binom{1}{-2}]$. *La matrice diagonale est* $\begin{pmatrix}5&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

c. On définit une suite de vecteurs $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $v_0=\binom{1}{0}$ et $v_{i+1}=\phi(v_i)$ pour tout $i\in\mathbf{N}$. Exprimer explicitement le terme général v_n en fonction de n.

$\surd$ *Les coordonnées de* v_0 *par rapport à la base* $\mathcal{B}$ *sont* $\binom{2/7}{5/7}_{\mathcal{B}}$. *La matrice de* ϕ *étant diagonale on trouve dans cette base* $v_n=(\begin{pmatrix}5^n&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}\cdot\binom{2/7}{5/7})_{\mathcal{B}}$ *c'est-à-dire* $v_n=\frac{1}{7}\binom{2\times5^n}{5\times(-2)^n}_{\mathcal{B}}$. *Dans la base canonique cela devient* $v_n=\binom{(2\times5^n+5\times(-2)^n)/7}{10\times(5^n-(-2)^n)/7}$.

2. Soit $K=\mathbf{Q}$, $E=\mathbf{Q}^4$, et $\phi\in\mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)=A=\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\-4&-3&8&a\\-1&-2&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

où $a\in\mathbf{Q}$ est un paramètre.

a. Expliquer pourquoi le polynôme caractéristique χ_A ne dépend pas de la valeur de a.

$\surd$ *En développant* $\det(XI_4-A)$ *par rapport à la dernière ligne on voit que* $\chi_A=(X-1)\det(XI_3-A')$, *où* A' *est la matrice des 3 premières lignes et les trois premières colonnes de* A, *matrice qui ne contient pas le paramètre* a.

b. Calculer χ_A, et montrer qu'il est scindé avec une racine double $\lambda=1$.

$\surd$ *On peut calculer que* $\det(XI_3-A')=X^3-2X^2-X+2$ *qui contient effectivement une (seconde) racine* 1, *en fait* $X^3-2X^2-X+2=(X-1)(X+1)(X-2)$ *et donc* $\chi_A=(X-1)^2(X+1)(X-2)$.

c. Montrer que pour $a=-2$ l'endomorphisme ϕ est diagonalisable, et indiquer une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation, c'est-à-dire tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ soit une matrice diagonale.

$\surd$ *Pour* $a=-2$ *on trouve* $\ker(A-I)=\mathrm{Vect}((1,1,1,0),(2,-1,0,-2))$, *ainsi que* $\ker(A+1)=\mathrm{Vect}((1,2,1,0))$ *et* $\ker(A-2)=\mathrm{Vect}((2,0,1,0))$. *Par rapport à la base* $[(1,1,1,0),(2,-1,0,-2),(1,2,1,0),(2,0,1,0)]$ *(effectivement une famille libre car la somme des espaces propres est toujours directe) la matrice de* ϕ *sera diagonale avec coefficients diagonaux* $1,1,-1,2$.

d. Montrer que si $a\neq-2$, alors ϕ n'est pas diagonalisable.

$\surd$ *Après réduction le noyau de* $A-I$ *est celui de la matrice*

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&2&-2&1\\0&0&0&2+a\end{pmatrix}$$

quel noyau est pour $a\neq-2$ *de dimension* 1 *(la matrice est échelonnée, et donc de rang* 3*). La valeur propre* $\lambda=1$ *ayant multiplicité* 2 *comme racine de* χ_A, *on sait que* ϕ *ne peut être diagonalisable que si* $\dim(\ker(A-I))=2$.

e. Dans le cas $a \neq -2$, déterminer tous les sous-espaces propres de ϕ, ainsi que son sous-espace caractéristique $\tilde{E}_1$ pour la valeur propre $\lambda = 1$.

$\surd$ *On a* $E_1 = \ker(A - I) = \mathrm{Vect}((1,1,1,0))$ *ainsi que* $E_{-1} = \ker(A + I) = \mathrm{Vect}((1,2,1,0)$ *et* $E_2 = \ker(A - 2I) = \mathrm{Vect}((2,0,1,0))$. *Pour* $\tilde{E}_1$ *on pourra calculer le noyau de*

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -10 & -2a \\ 8 & 8 & -16 & -4-4a \\ 5 & 4 & -9 & -1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais plus simple est de trouver une solution x *de* $(A - I) \cdot x = v_1$ *où* $v_1 = (1,1,1,0)$ *est le vecteur propre pour* $\lambda = 1$ *trouvé auparavant ; alors* $\tilde{E}_1 = \mathrm{Vect}(v_1, x)$. *On trouve (par exemple)* $x = \frac{1}{2(a+2)}(2, -a-3, 0, -2)$.

3. Soit U la matrice (dépendant de paramètres $a, b, c, d, t, u, v, w \in K$) :

$$U = \begin{pmatrix} a & u & 0 & t \\ 0 & b & v & 0 \\ 0 & 0 & c & w \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

a. Quel est le polynôme caractéristique de U ? Quelles sont les valeurs propres de U ?

$\surd$ *Le polynôme caractéristique est* $\chi_U = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$ *et l'ensemble des valeurs propres est* $\{a, b, c, d\}$.

b. À quelles conditions sur les paramètres la matrice U est-elle diagonalisable dans les cas suivants :

i. a, b, c, d sont distincts ?

$\surd$ *Dans ce cas* χ_U *est scindé et à racines simples, donc* U *est toujours diagonalisable.*

ii. $a = b = c = d$?

$\surd$ *Dans ce cas la seule valeur propre est* a, *donc* U *n'est diagonalisable que si* U *est diagonal (de façon équivalente si* $U - aI = 0$*), c'est-à-dire si* $t = u = v = w = 0$.

iii. $a = b \neq c = d$?

$\surd$ *Dans ce cas les seules valeurs propres distinctes sont* a *et* c, *et* U *est diagonalisable ssi on a* $((X-a)(X-c))[U] = 0$, *c'est-à-dire* $(U - aI)(U - cI) = 0$, *ce qui arrive ssi* $u = w = 0$.

4. Soit $K = \mathbf{C}$, $E = \mathbf{C}[X]_{<5}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré strictement inférieur à 5. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par $\phi(P) = P[X+1]$, c'est-à-dire c'est l'opération qui consiste à substituer $X+1$ pour X (par exemple, $\phi(X^2 - 7X + 2) = (X+1)^2 - 7(X+1) + 2 = X^2 - 5X - 4$.)

a. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{E} = [1, X, X^2, X^3, X^4]$ de E.

$\surd$ *Par la formule du binôme*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Montrer que ϕ possède une unique valeur propre λ, à savoir $\lambda = 1$.

$\surd$ *La matrice étant triangulaire on voit tout de suite que* $\chi_\phi = (X-1)^5$, *n'ayant que* 1 *pour racine.*

c. Décrire $\mathrm{Ker}((\phi - \mathrm{id})^k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\surd$ *Ce noyau est égal au sous-espace* $\mathbf{C}[X]_{<k}$ *(de dimension* k*) de* E, *comme on déduit facilement de la forme triangulaire supérieure stricte de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) - I$.

5. Soit $K = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}^4$, et $\phi \in \mathrm{End}(E)$ donné par sa matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Pour le second vecteur $e_2 = (0,1,0,0)$ de $\mathcal{E}$, trouver le plus petit $d \in \mathbf{N}$ tel que les vecteurs $e_2, \phi(e_2), \ldots, \phi^d(e_2)$ forment une famille liée. Donner $P \in K[X]$ unitaire de degré d tel que $P[\phi](v) = 0$.

$\surd$ *On trouve* $(0,1,0,0) \overset{\phi}{\mapsto} (1,0,0,1) \overset{\phi}{\mapsto} (0,-2,0,0)$*, et donc la relation* $\phi^2(e_2) + 2e_2 = 0$*. La relation se traduit par* $(X^2+2)[\phi](v) = 0$*, donc* $P = X^2 + 2$.

b. Calculer la matrice de $P[\phi]$, et trouver ensuite le polynôme minimal μ de ϕ sous la forme $\mu = PQ$.

$\surd$ *On a*

$$M^2 + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Im}(P[\phi]) = \mathrm{Vect}((0,1,0,1),\ (1,1,1,1))$*. Similaire à ce qu'on avant fait avant pour* e_2*, on trouve* $w = (0,1,0,1) \overset{\phi}{\mapsto} (1,0,1,0) \overset{\phi}{\mapsto} (0,-1,0,-1) = -w$ *donc* $(\phi^2 + I)(w) = 0$*. Pour le polynôme* $Q = X^2 + 1$ *on voit que c'est le polynôme unitaire de degré minimal tel* $Q[\phi](w) = 0$*. En fait* $\mathrm{Ker}(Q[\phi]) \supseteq \mathrm{Vect}(w, \phi(w)) = \mathrm{Im}(P[\phi])$*, donc* PQ *est un polynôme annulateur* PQ *de* ϕ*, et* $\mu = PQ = (X^2+2)(X^2+1)$.

c. Est-ce que ϕ est diagonalisable ? (Attention : on a $K = \mathbf{R}$.)

$\surd$ *Non* ϕ *n'est pas diagonalisable car* μ *n'est pas scindé (résultat du cours :* ϕ *diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal* μ *est scindé et racines simples).*

d. Montrer, en considérant uniquement les polynômes P, Q, que $E = \mathrm{Ker}(P[\phi]) \oplus \mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

$\surd$ *Visiblement* $\mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$ *car déjà* $P - Q = 1$*. Donc le théorème de décomposition des noyaux s'applique, et donne* $E = \mathrm{Ker}(P[\phi]) \oplus \mathrm{Ker}(Q[\phi])$ *car (pour le premier membre qui est* $\ker((PQ)[\phi])$ *dans le théorème) on a* $(PQ)[\phi] = 0$.

Dans le reste de l'exercice, il s'agit d'illustrer cette décomposition.

e. Méthode 1.

i. Calculer des bases de $\mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

$\surd$ *On a déjà calculé la matrice* $M^2 + 2I$ *de* $P[\phi]$ *ci-dessus, et on voit facilement que son noyau est* $\mathrm{Vect}((0,1,0,0),(1,0,0,1))$*. La matrice de* $Q\phi]$ *est* $M^2 - I$*, dont le noyau est* $\mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$.

ii. Pour un vecteur $v = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, expliciter l'écriture $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $v_2 \in \mathrm{Ker}(Q[\phi])$.

$\surd$ *Pour trouver l'écriture on peut résoudre les coefficients* a, b, c, d *dans l'équation* $a(0,1,0,0) + b(1,0,0,1) + c(1,0,1,0) + d(0,1,0,1) = (x,y,z,t)$*, ce qui est équivalent à trouver la matrice inverse de celle avec ces 4 vecteurs comme colonnes ; mais on résout aussi sans problème successivement* $c = z$*,* $b = x - z$*,* $d = -x + z + t$ *et finalement* $a = x + y - z - t$*. Cela donne l'écriture* $v_1 = (x - z, x + y - z - t, 0, x - z)$ *et* $v_2 = (z, -x + z + t, z, -x + z + t)$.

f. Méthode 2.

i. Trouver (éventuellement à l'aide de coefficients de Bézout) des polynômes R_1, R_2 tels que

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv 1 \pmod{P}, & R_2 &\equiv 0 \pmod{P}, \\ R_1 &\equiv 0 \pmod{Q}, & R_2 &\equiv 1 \pmod{Q}. \end{aligned}$$

$\surd$ *Puisque* $P - Q = 1$ *on peut prendre* $R_1 = -Q$ *et* $R_2 = P$.

ii. On pose $\pi_1 = R_1[\phi]$ et $\pi_2 = R_2[\phi]$. Montrer sans calcul que les conditions établies dans le point *i* entraînent $\mathrm{Im}(\pi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\mathrm{Im}(\pi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(Q[\phi])$, ainsi que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_E$.

$\surd$ *Pour l'évaluation en* $X = \phi$ *on peut calculer modulo le polynôme annulateur* PQ*, et comme* $PQ = \mathrm{ppcm}(P,Q)$ *une congruence modulo* PQ *est vérivée si et seulement si elle est vérifiée modulo* P *et modulo* Q*. On a, modulo ces deux polynômes,* $PR_1 \equiv 0$ *et* $QR_2 \equiv 0$*, et donc* $P[\phi] \circ \pi_1 = 0$ *et* $Q[\phi] \circ \pi_2 = 0$*, ce qui donne les deux premières égalités. Et* $R_1 + R_2 \equiv 0$ *(additionner les deux ligne ci-dessus) donne la dernière.*

iii. Calculer π_1 et π_2 et vérifier les relations du point *ii.*

$\surd$

$$\pi_1 = -M^2 + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{et} \quad \pi_2 = M^2 + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et puisque $P[\phi] = \pi_2$ et $Q[\phi] = -\pi_1$ les inclusions sont facilement vérifiés.

iv. Conclure que $v = \pi_1(v) + \pi_2(v)$ avec $\pi_1(v) \in \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\pi_2(v) \in \mathrm{Ker}(Q[\phi])$, pour tout $v \in \mathbf{R}^4$.

$\surd$ *Clairement $\pi_1(v) \in \mathrm{Im}(\pi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(P[\phi])$ et $\pi_2(v) \in \mathrm{Im}(\pi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(Q[\phi])$, il ne reste rien à prouver. Et$v = \pi_1(v) + \pi_2(v)$ découle de $\pi_1 + \pi_2 = I$.*

Fin.