Corrigé Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 5 novembre 2014
8h15–10h15

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Décrire le sous-espace $\ker(f) \subseteq \mathbf{C}^4$ par un système d'équations linéaires.

$\surd$ *Si $x \in \mathbf{C}^4$ désigne un vecteur inconnu de coordonnées $x_1, \ldots, x_4$, l'équation $x \in \ker(f)$ s'écrit $A \cdot x = \vec{0}$, et donne le système*

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

b. Résoudre ce système, et donner une base de $\ker(f)$.

$\surd$ *Après quelques opérations sur les lignes on voit que le système n'a que rang 2, et est équivalent à*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad - 2x_4 = 0, \\ \quad - 7x_2 + x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Pour la solution générale on peut donc choisir x_2, x_4 librement, et résoudre $x_1 = -3x_2 + 2x_4$ et $x_3 = 7x_2 - 7x_4$. Pour une base on prend $x_2 = 1, x_4 = 0$ respectivement $x_2 = 0, x_4 = 1$, ce qui donne la paire de vecteurs $b_1 = (-3, 1, 7, 0)$ et $b_2 = (2, 0, -7, 1)$.

c. Trouver une base de l'image $\operatorname{Im}(f)$. [On pourra utiliser ce qu'on a trouvé dans la question *b.*]

$\surd$ *Les colonnes $C_1, \ldots, C_4$ de A engendrent $\operatorname{Im}(f)$, et il s'agit d'en extraire une base. On peut interpréter les équations $A \cdot b_1 = 0$ et $A \cdot b_2 = 0$ comme des relations entre ces colonnes, à savoir $-3C_1 + C_2 + 7C_3 = 0$ respectivement $2C_1 - 7C_3 + C_4 = 0$. Celles-ci montrent ce C_2 et C_4 s'expriment comme combinaisons linéaires de C_1, C_3, donc $[C_1, C_3]$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Puisque elle est aussi libre (par inspection, ou en utilisant le théorème du rang qui dit que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbf{C}^4) - \dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$), c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.*

d. Trouver une base de $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

$\surd$ *La méthode générale, vu en TD, de trouver une base pour $\operatorname{Vect}(u, v) \cap \operatorname{Vect}(w, x)$ (où le nombre de vecteurs de chaque côté peut varier, et où on peut supposer que séparément les deux familles sont libres) commence avec la recherche de la solution générale (donc paramétrée) du système $c_1u + c_2v = c_3w + c_4x$. Ici, avec les bases trouvées ci-dessus, on peut former le système $c_1b_1 + c_2b_2 = c_3C_1 + c_4C_3$, dont un (long) calcul donne la solution $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (c, c, c, -3c)$ avec paramètre $c \in \mathbf{R}$. Ceci qui montre que $\dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)) = 1$ (il y a 1 paramètre), et pour vecteur de sa base on peut fixer $c = 1$, donnant $1b_1 + 1b_2 = 1C_1 - 3C_3 = (-1, 1, 0, 1)$. Mais on peut éviter ce nouveau système 4×4 à résoudre car la condition $c_3C_1 + c_4C_3 \in \ker(f)$ veut dire que $c_3C_1 + c_4C_3$ vérifie les deux conditions $(*)$ décrivant $\ker(f)$, ce qui donne un système 2×2 plus facile à résoudre. Concrètement les équations donnent, après substitution des valeurs de C_1, C_3 le système*

$$\begin{cases} 18c_3 + 6c_4 = 0, \\ -24c_3 - 8c_4 = 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

deux équations clairement équivalentes, et qui ont pour solution générale $(c_3, c_4) = (c, -3c)$ pour $c \in \mathbf{R}$, concordant à ce qui précède, et qui donne la même base $[(-1, 1, 0, 1)]$ de l'intersection.

e. On peut en déduire *sans calcul supplémentaire* soit que f est diagonalisable, soit que f n'est pas diagonalisable. Lequel des deux est le cas, et pourquoi ? (Des réponses avec un calcul ne seront pas prises en considération.)

$\surd$ *Le fait que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ montre que leur somme n'est pas directe, donc f ne peut pas être diagonalisable : il a été montré dans le cours que plus généralement si f diagonalisable, alors $E = \ker(f - \lambda \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{id})$ (ici on utilise le cas $\lambda = 0$).*

2. Soit $E = \mathbf{R}^3$ et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 16 & 12 & -10 \\ 14 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X+2 & 1 & -1 \\ -16 & X-12 & 10 \\ -14 & -11 & X+9 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3 + X^2(2-12+9) + X(\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -16 & -12 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -12 & -10 \\ 11 & -9 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -14 & -9 \end{smallmatrix}\right|) - \det B = X^3 - X^2 + X(-8+2+4) + 0 = X^3 - X^2 - 2X$. *C'est un peu plus simple si l'on ajoute la dernière colonne à la seconde, puis soustrait la seconde ligne de la dernière, donnant*

$$\begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ -16 & X-2 & 10 \\ -14 & X-2 & X+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ -16 & X-2 & 10 \\ 2 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

(d'autres simplifications sont également possibles).

b. Décomposer χ_B comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ $X^3 - X^2 - 2X = X(X-2)(X+1)$, *dont les racines sont* 0, 2, *et* -1.

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable (en n'utilisant que la connaissance de χ_B, donc sans calculer une base telle que demandée dans la question suivante).

$\surd$ *Les trois racines de* χ_B *sont des valeurs propres de* ϕ, *et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins* 1 *(en fait exactement* 1, *mais cela ne sera pas utilisé). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins* $1+1+1=3$, *d'où elle remplit l'espace* E *qui est de dimension* 3. *Que* E *est somme (directe) des espaces propres de* ϕ *est que* ϕ *est diagonalisable. (Un vecteur propre choisi dans chaque espace propre donnera une base de* E*.)*

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ *et* $\lambda = -1$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 16 & 12 & -10 \\ 14 & 11 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 16 & 10 & -10 \\ 14 & 11 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B + I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 16 & 13 & -10 \\ 14 & 11 & -8 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune est de rang 2 *(il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs* $(1,2,4)$, $(0,1,1)$, *et* $(-1,2,1)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = 0$, *pour* $\lambda = 2$ *et pour* $\lambda = -1$.

3. Soit a, b deux nombres réels *distincts*. On forme le polynôme P de degré 2 dont a, b sont les racines, c'est-à-dire $P = (X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$. Soit ϕ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$, dont on suppose qu'il vérifie l'équation $P[\phi] = 0 \in \operatorname{End}(E)$, c'est-à-dire $\phi^2 - (a+b)\phi + ab \operatorname{id}_E = 0$.

a. Montrer que les seules valeurs propres λ que ϕ peut avoir sont $\lambda = a$ et $\lambda = b$.

$\surd$ *Si* v *est vecteur propre pour* λ *on a* $0 = \phi^2(v) - (a+b)\phi(v) + abv = \lambda^2 v - \lambda(a+b)v + abv = P[\lambda]v$. *Comme par définition* $v \neq \vec{0}$, *on doit avoir* $P[\lambda] = 0$, *c'est-à-dire* λ *est racine de* P, *donc* $\lambda \in \{a, b\}$.

b. On note $E_\lambda = \ker(\phi - \lambda \operatorname{id})$ pour $\lambda \in \{a, b\}$. Montrer que $\phi(v) - av \in E_b$ pour tout $v \in E$.

$\surd$ *En calculant* $(\phi - b\operatorname{id})(\phi(v) - av) = \phi^2(v) - a\phi(v) - b\phi(v) + abv$ *on voit que c'est* $P[\phi](v)$, *donc* 0 *car* $P[\phi] = 0$; *alors* $\phi(v) - av \in \ker(\phi - b\operatorname{id}) = E_b$.

c. Appliquer le théorème du rang à $\phi - a\,\mathrm{id}$ pour déduire de la question précédente l'inégalité $\dim(E_a + E_b) \geq \dim(E)$, pour ensuite conclure $E_a + E_b = E$. Citez avec soin les résultats théoriques utilisés dans l'argumentation (y compris l'énoncé du théorème du rang).

$\surd$ *Le théorème du rang dit que* $\dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id}) + \dim\mathrm{Im}(\phi - a\,\mathrm{id}) = \dim(E)$. *La question précédente dit que* $\mathrm{Im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \subseteq \ker(\phi - b\,\mathrm{id})$, *dont il découle que* $\dim(\mathrm{Im}(\phi - a\,\mathrm{id})) \leq \dim(\ker(\phi - b\,\mathrm{id}))$, *et substitution de l'énoncé du théorème du rang donne* $\dim(E) \leq \dim(E_a) + \dim(E_b)$. *La somme* $E_a + E_b$ *est directe car c'est une somme d'espaces propres pour des valeurs propres distincts (ici on utilise* $a \neq b$*). Cela veut dire* $\dim(E_a) + \dim(E_b) = \dim(E_a + E_b)$, *et on a obtenu* $\dim(E) \leq \dim(E_a + E_b)$ *comme voulu. Le sous-espace* $E_a + E_b$ *ayant dimension* $\geq \dim(E)$, *il est forcément* E *tout entier.*

d. En fixant $v \in E$ on pose $w_1 = \phi(v) - av$ et $w_2 = \phi(v) - bv$ (d'après la question *b* on a $w_1 \in E_b$, et en échangeant les rôles de a, b également $w_2 \in E_b$). Écrire v comme combinaison linéaire de w_1 et de w_2 (ce qui rend plus explicite le fait que $E = E_a + E_b$, déjà trouvé dans la question *c*).

$\surd$ *On a* $w_1 - w_2 = (b - a)v$, *ce qui entraîne grâce à* $a \neq b$ *que* $v = \frac{1}{b-a}(w_1 - w_2) = \frac{1}{b-a}w_1 + \frac{1}{a-b}w_2$.

e. Quelle propriété de ϕ découle de ces questions ? Est-ce que a, b sont forcément tous deux des valeurs propres de ϕ ? (D'après la question *a*, ce sont les seules valeurs propres *possibles*).

$\surd$ *Le fait* $E = E_a + E_b$ *dit que* ϕ *est diagonalisable (avec comme il est dit des valeurs propres contenues dans* $\{a, b\}$*). En effet on peut choisir une famille génératrice formée de vecteurs choisis dans* $E_A \cup E_b$, *et on peut en extraire une base, formée donc de vecteurs propres, ce qui montre que* ϕ *est diagonalisable (sur cette base). En fait, puisque la somme* $E_a + E_b$ *est directe, une telle base est précisément la réunion d'une base de* E_a *et une base de* E_b. *Il est possible que* $\dim(E_a) = 0$ *ou* $\dim(E_b)$, *et dans ce cas* a *(respectivement* b*) n'est pas valeur propre de* ϕ *(cela arrive quand* $\phi = b\,\mathrm{id}$, *respectivement quand* $\phi = a\,\mathrm{id}$*).*

f. [bonus] Où dans vos réponses l'hypothèse $a \neq b$ est-elle utilisée ? Ces réponses seraient-elles différentes si on n'avait pas eu cette hypothèse ?

$\surd$ *L'utilisation de* $a \neq b$ *est indiquée dans la réponse à la question c. Sans cette hypothèse la somme* $E_a + E_b$, *qui devient* $E_a + E_a$, *n'est pas une somme directe, et on n'obtient pas que* $\dim(E_a + E_a) \geq \dim(E)$. *La preuve "plus explicite" de la question d utilise également* $a \neq b$. *L'exemple de* ϕ *donné en dimension 2 par la matrice* $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ *montre que la conclusion "*ϕ *diagonalisable" n'est en fait pas justifiée dans ce cas.*

Fin.