Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mardi 5 novembre 2013
14h-16h

Les documents ne sont pas autorisés.
Les calculatrices sont le seul type d'appareil électronique autorisé.
Barème indicatif: question **1** : 6 pt, question **2** : 7 pt, question **3** : 7 pt.

1. Soit $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{Q})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 14 & 3 & -8 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbf{Q}$.

b. Trouver $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbf{Q})$ tel que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

c. Donner une expression pour A^n, valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\lambda \in K$, et ϕ un endomorphisme de E. On pose $V = \mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ et $W = \mathrm{Im}(\phi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ (des sous-espaces de E).

a. Que peut-on dire de V et de W si λ n'est pas valeur propre de ϕ ?

b. Montrer rapidement qu'on a toujours $\dim(V) + \dim(W) = \dim(E)$.

c. En déduire que $V + W = E$ si et seulement si la somme $V + W$ est directe.

d. Donner un exemple où $V + W \neq E$ (pour la simplicité vous pouvez prendre $\lambda = 0$).

e. Si λ est une valeur propre de ϕ, alors V est par définition l'espace propre correspondant. Si en plus ϕ est diagonalisable sur K, on peut aussi décrire W en termes des espaces propres de ϕ ; donner une telle description. [On pourra utiliser une base de vecteurs propres.]

f. Montrer que si ϕ est diagonalisable, alors $E = V \oplus W$.

g. Conclure que dans votre exemple de la question *d*, l'endomorphisme ϕ n'est pas diagonalisable.

3. Soit K l'un des corps $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ une matrice vérifiant $A^2 = I_n$.

a. Montrer que si $\lambda \in K$ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \{1, -1\}$.

b. Soit $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{\, v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda v \,\}$ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$, et soit $v \in K^n$ quelconque. Trouver une combinaison linéaire non triviale de v et de $A \cdot v$ qui est dans V_1 (quel que soit le vecteur v choisi), et une autre telle combinaison linéaire non triviale qui est de façon certaine dans V_{-1}.

c. Montrer que $V_1 + V_{-1} = K^n$ [indication : écrire dans la situation de la question précédente v à son tour en termes des combinaisons linéaires trouvées.]

d. Montrer que A est diagonalisable (sur K).

e. Si la valeur -1 *n'est pas* valeur propre de A, que peut-on dire de A ?

f. On suppose maintenant $n = 2$. Montrer qu'on est dans l'un des trois cas suivants: (1) $A = I_2$, (2) $A = -I_2$, (3) A est semblable à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

g. Montrer que dans le cas (3) on peut écrire $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b, c \in K$ tels que $a^2 + bc = 1$. [On pourra calculer explicitement $P\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}$ avec P une matrice inversible.]

Fin.