Examen Algèbre Linéaire 2 mercredi 26 juin 2013
14h–17h

Les documents ne sont pas autorisés. Les 3 parties sont indépendantes.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice, dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est diagonalisable en trouvant une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

b. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $g^3 = f$. Si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, montrer que $g(v)$ est également un vecteur propre de f pour λ.

c. Montrer que ce vecteur v est aussi un vecteur propre de g, pour une certaine valeur propre μ. Quelle relation existe-t-il entre λ et μ ?

d. En déduire qu'il existe exactement une matrice *réelle* X telles que $X^3 = A$ (il n'est pas demandé de l'expliciter).

e. Combien de matrices *complexes* X existe-t-il avec $X^3 = A$?

2. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des suites infinies $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout n, qui vérifient

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Une telle suite est déterminée par le couple (x_0, x_1) de ces deux premiers termes, et l'application $E \to \mathbf{R}^2$ qui associe à la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le vecteur $\binom{x_0}{x_1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

a. Quelle est la dimension de E ?

b. Donner une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

c. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$, et si $\binom{x_0}{x_1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, exprimer le terme général x_n par une expression dans laquelle figurent seulement x_0, λ, et n.

d. Trouver les valeurs propres de A, et les vecteurs propres pour chacune de ces valeurs propres.

e. En utilisant les résultats des questions précédentes, donner une expression pour le terme général b_n de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ pour laquelle $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$.

3. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'un endomorphisme ϕ. On appelle $v \in V$ un vecteur cyclique si la famille $(v, \phi(v), \phi^2(v), \dots, \phi^{n-1}(v))$ est libre. On suppose dans cette partie que V contient un vecteur cyclique v.

a. Montrer que $(v, \phi(v), \phi^2(v), \dots, \phi^{n-1}(v))$ est une base de V.

b. Argumenter que dans ce cas, la matrice A de ϕ par rapport à cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix};$$

autrement dit c'est la *matrice compagnon* d'un polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ unitaire de degré n.

c. Vérifier que $\phi^n(v) - a_{n-1}\phi^{n-1}(v) - \dots - a_1\phi(v) - a_0v = 0$, ce qu'on écrira $P[\phi](v) = 0$.

sujet continué au verso

d. En déduire que $P[\phi](w) = 0$ pour chaque $w = \phi^k(v)$ avec $0 \leq k < n$, et ensuite pour tout $w \in V$.

e. Montrer que P est le polynôme minimal de ϕ.

f. Déterminer le polynôme caractéristique de ϕ.

On suppose maintenant que $n = 3$, $K = \mathbf{C}$, et que pour un certain $c \in \mathbf{C}$ on ait $P = X^3 - X^2 + cX - c$. Donc ϕ a pour matrice dans la base $\mathcal{B} = (v, \phi(v), \phi^2(v))$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

g. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ, quel que soit c, et trouver (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de la constante c) les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur propre pour $\lambda = 1$.

h. Trouver dans le cas particulier $c = 1$ une base constituée de vecteurs propres.

i. Déterminer l'ensemble de valeurs de la constante c pour lesquelles ϕ est diagonalisable.

j. Déterminer les espaces caractéristiques de ϕ dans le cas particulier $c = 0$.

Fin.