Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mercredi 26 juin 2013

14h–17h

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice, dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est diagonalisable en trouvant une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique est* $\chi_A = (X-8)\big((X-4)(X+3)-(-2)\times 6\big) = (X-8)X(X-1)$, *qui est donc scindé à racines simples* $0, 1, 8$. *On peut trouver des vecteurs propres pour ces trois valeurs propres comme des vecteurs* v_i *annulés par* $A - \lambda_i I$ *pour* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, *et* $\lambda_3 = 8$, *et on trouve par exemple* $v_1 = (3, 0, -2)$, $v_2 = (2, 0, -1)$, $v_3 = (41, 56, 18)$ *; comme des vecteurs propres pour des valeurs propres distincts sont toujours linéairement indépendantes, c'est une base formée de vecteurs propres.*

b. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $g^3 = f$. Si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ, montrer que $g(v)$ est également un vecteur propre de f pour λ.

$\surd$ *Supposons* $f(v) = \lambda v$ *avec* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Alors*

$$f(g(v)) = (g^3)(g(v)) = g^4(v) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v),$$

donc $g(v)$ *est valeur propre d* f *avec la même valeur propre* λ.

c. Montrer que ce vecteur v est aussi un vecteur propre de g, pour une certaine valeur propre μ. Quelle relation existe-t-il entre λ et μ ?

$\surd$ *Les trois espaces propres de* f, *pour* $\lambda = 0, 1, 8$, *sont chacun de dimension* 1, *donc si* $g(v)$ *est un vecteur propre de* f *pour la même vecteur propre* λ, *c'est que* $g(v)$ *est un multiple scalaire de* v, *disons* $g(v) = \mu v$. *Alors* v *est vecteur propre de* g *pour la valeur propre* μ. *Or* $f(v) = g^3(v) = g^2(\mu v) = \mu g^2(v) = \mu^2 g(v) = \mu^3 v$, *donc on a la relation* $\lambda = \mu^3$ *entre la valeur propre* λ *pour* f *et la valeur propre* μ *pour* g.

d. En déduire qu'il existe exactement une matrice *réelle* X telles que $X^3 = A$ (il n'est pas demandé de l'expliciter).

$\surd$ *L'endomorphisme* g *de matrice* X *doit vérifier* $g^3 = f$, *donc la question précédente s'applique. Comme les vecteurs propres pour* f *le sont aussi pour* g, *la matrice* X *exprimée sur la base* (v_1, v_2, v_3) *de vecteurs propres est diagonale, avec comme coefficients diagonaux* μ_1, μ_2, μ_3 *les valeurs propres pour* g *qui vérifient donc* $\mu_1^3 = 0$, $\mu_2^3 = 1$ *et* $\mu_3^3 = 8$. *Comme le* μ_i *doivent être réels, on a pour chacune une seule possibilité :* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ *et* $\mu_3 = 2$, *et il existe une unique* X.

e. Combien de matrices *complexes* X existe-t-il avec $X^3 = A$?

$\surd$ *Pour les coefficients diagonaux* μ_i *on admet maintenant les racines cubiquescomplexes de* $0, 1, 8$ *respectivement. Pour* 0 *il n'existe toujours qu'une seule telle racine, mais* 1 *et* 8 *ont chacune trois racines cubiques (on peut multiplier la racine réelle par* $\beth$ *ou par* $\beth^2$, *où* $\beth = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ *vérifie* $\beth^3 = 1$). *Au total on trouve* $1 \times 3 \times 3 = 9$ *solutions complexes pour* X.

2. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des suites infinies $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout n, qui vérifient

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Une telle suite est déterminée par le couple (x_0, x_1) de ces deux premiers termes, et l'application $E \to \mathbf{R}^2$ qui associe à la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ le vecteur $\binom{x_0}{x_1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

a. Quelle est la dimension de E ?

$\surd$ *Comme* E *est isomorphe à* $\mathbf{R}^2$, *la dimension est* 2.

b. Donner une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$\surd$ *Chaque ligne de la matrice exprime une composante du résultat comme combinaison linéaire des composantes de l'argument; il est donc clair que la première ligne est* $(0\ \ 1)$ *car* $x_{n+1} = 0x_n + 1x_{n+1}$, *et la seconde, qui reflète la relation* $x_{n+2} = 2x_n + x_{n+1}$ *est* $(2\ \ 1)$; *au total on obtient* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

c. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$, et si $\binom{x_0}{x_1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, exprimer le terme général x_n par une expression dans laquelle figurent seulement x_0, λ, et n.

$\surd$ *Comme* $\binom{x_0}{x_1}$ *est vecteur propre pour* λ, *on a d'après la définition de* A *et d'une valeur propre* $\binom{x_n}{x_{n+1}} = A^n \cdot \binom{x_0}{x_1} = \lambda^n \binom{x_0}{x_1}$. *Par inspection de la première coordonnée,* $x_n = \lambda^n x_0$.

d. Trouver les valeurs propres de A, et les vecteurs propres pour chacune de ces valeurs propres.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique de* A *est* $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, *et ses racines sont* -1 *et* 2. *Un vecteur propre pour* -1 *est* $\binom{1}{-1}$ *et un vecteur propre pour* 2 *est* $\binom{1}{2}$. *Les suites* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *correspondantes sont des suites géométriques avec* $x_n = \lambda^n$; *pour* $\lambda = -1$ *c'est une suite alternante avec* $x_n = (-1)^n x_0 \neq 0$ *pour tout* n, *et pour* $\lambda = 2$ *c'est* $x_n = 2^n$.

e. En utilisant les résultats des questions précédentes, donner une expression pour le terme général b_n de la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ pour laquelle $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$.

$\surd$ *Une combinaison linéaire de ces deux types de vecteur propre est de la forme* $x_n = a(-1)^n + c2^n$, *et les conditions* $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ *permettent de résoudre* $a = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$, *donc* $b_n = (2(-1)^n + 2^n)/3$.

3. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'un endomorphisme ϕ. On appelle $v \in V$ un vecteur cyclique si la famille $(v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{n-1}(v))$ est libre. On suppose dans cette partie que V contient un vecteur cyclique v.

a. Montrer que $(v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{n-1}(v))$ est une base de V.

$\surd$ *Cette famille est libre par hypothèse. Elle est donc une base du sous-espace qu'elle engendre, et ce sous-espace est de dimension* n *car la famille a* n *éléments. Or l'espace entier* V *à cette même dimension, donc le sous-espace en question est égal à* V, *et la famille en est une base.*

b. Argumenter que dans ce cas, la matrice A de ϕ par rapport à cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix};$$

autrement dit c'est la *matrice compagnon* d'un polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$ unitaire de degré n.

$\surd$ *Il est clair que* $\phi(\phi^k(v)) = \phi^{k+1}(v)$ *pour* $0 \leq k < n-1$ *(en fait c'est vrai pour tout* $k \in \mathbf{N}$*). Comme dans ces cas* $\phi^{k+1}(v)$ *est un vecteur de notre base, qui suit le vecteur* $\phi^k(v)$ *auquel on a appliqué* ϕ, *les premières* $n-1$ *colonnes de la matrice* A *de* ϕ *dans cette bases sont celles qui sont indiquées. La dernière colonne exprime l'image de dernier vecteur de base* $\phi^{n-1}(v)$ *dans la base (ce qui est possible pour tout vecteur de* V*), c'est-à-dire* $\phi(\phi^{n-1}(v)) = a_0v + a_1\phi(v) + \cdots + a_{n-1}\phi^{n-1}(v)$.

c. Vérifier que $\phi^n(v) - a_{n-1}\phi^{n-1}(v) - \cdots - a_1\phi(v) - a_0v = 0$, ce qu'on écrira $P[\phi](v) = 0$.

$\surd$ *Comme* $\phi(\phi^{n-1}(v)) = \phi^n(v)$, *l'équation ci-dessus devient, si on ramène tous les termes dans le premier membre en les triant par degré décroissant,* $\phi^n(v) - a_{n-1}\phi^{n-1}(v) - \cdots - a_1\phi(v) - a_0v = 0$.

d. En déduire que $P[\phi](w) = 0$ pour chaque $w = \phi^k(v)$ avec $0 \leq k < n$, et ensuite pour tout $w \in V$.

$\surd$ *Comme* ϕ *commute avec le polynôme* $P[\phi]$ *en* ϕ, *on a* $P[\phi](\phi^k(v)) = \phi^k(P[\phi](v)) = \phi^k(0) = 0$, *ce qui montre la première partie, et comme ces* $\phi^k(v)$ *sont une base de* V, *il découle de la linéarité de* $P[\phi]$ *que* $P[\phi](w) = 0$ *pour tout* $w \in V$.

e. Montrer que P est le polynôme minimal de ϕ.

$\surd$ *On vient de voir que* $P[\phi] = 0$, *donc il reste seulement à montrer qu'aucun polynôme non nul* $Q = q_0 + q_1X + \cdots + q_dX^d$ *avec* $d < n$ *ne vérifie* $Q[\phi] = 0$. *Mais* $Q[\phi](v) = q_0v + q_1\phi(v) + \cdots + q_d\phi^d(v) \neq 0$ *d'après l'indépendance linéaire de* $v, \ldots, \phi^{n-1}(v)$, *ce qui exclut la possibilité* $Q[\phi] = 0$.

f. Déterminer le polynôme caractéristique de ϕ.

$\surd$ *Pour montrer que le polynôme caractéristique de la matrice compagnon d'un polynôme unitaire P est égal à P, plusieurs méthodes de calcul de $\det(XI - A)$ existent (dont au moins une vue en TD) : (1) développement par la dernière colonne (le cofacteur associé à $-a_i$ est $-X^i$), (2) récurrence sur $n = \deg P$ à l'aide de développement par la première ligne, (3) opérations sur les lignes, de bas en haut, pour faire disparaître les X sur le diagonal (sauf le dernier), et où le coefficient $-a_0$ est remplacé par $-a_0 - X(a_1 - X(\cdots)) = -P$. On peut aussi simplement invoquer le théorème de Cayley-Hamilton qui dit que le polynôme caractéristique est un multiple, unitaire et de degré n, du polynôme minimal, et comme celui-ci est ici déjà de degré n, ils doivent être égaux.*

On suppose maintenant que $n = 3$, $K = \mathbf{C}$, et que pour un certain $c \in \mathbf{C}$ on ait $P = X^3 - X^2 + cX - c$. Donc ϕ a pour matrice dans la base $\mathcal{B} = (v, \phi(v), \phi^2(v))$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

g. Montrer que 1 est une valeur propre de ϕ, quel que soit c, et trouver (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de la constante c) les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur propre pour $\lambda = 1$.

$\surd$ *On a $P[1] = 1 - 1 + c - c = 0$ donc 1 est racine du polynôme minimal, et donc valeur propre de ϕ. L'espace propre pour cette valeur propre est $\operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{Id})$, et on peut vérifier facilement que le vecteur de coordonnées $(c, 0, 1)$, c'est-à-dire $cv + \phi^2(v)$, est un vecteur non nul dans ce noyau.*

h. Trouver dans le cas particulier $c = 1$ une base constituée de vecteurs propres.

$\surd$ *On a $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$ et le facteur quadratique se factorise $X^2+1 = (X-\mathbf{i})(X+\mathbf{i})$. Le polynôme minimal est donc scindé avec 3 racines distinctes $1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}$, et ϕ est donc diagonalisable. Après calcul du noyau de $\lambda\,\mathrm{Id} - \phi$ pour $\lambda \in \{1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ sous forme matricielle, on trouve les vecteurs propres suivants :*

$$1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} : \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad -\mathbf{i} : \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

i. Déterminer l'ensemble de valeurs de la constante c pour lesquelles ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *On a $P = X^3 - X^2 + cX - c = (X-1)(X^2+c)$. Comme c'est le polynôme minimal de ϕ, celui-ci est diagonalisable si et seulement si ce polynôme est à racines simples. C'est le cas pourvu que $X^2 + c$ soit a racines simples, et n'ait pas 1 (la racine de $X - 1$) comme racine. La première condition es équivalente à $c \neq 0$, la seconde à $c \neq -1$. Donc ϕ est diagonalisable pour $c \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1\}$.*

j. Déterminer les espaces caractéristiques de ϕ dans le cas particulier $c = 0$.

$\surd$ *Pour $c = 0$ le polynôme $P = X^3 - X^2$ possède une racine simple $\lambda = 1$ et une racine double $\lambda = 0$. L'espace propre pour $\lambda = 1$ est de dimension 1 et un vecteur propre est trouvé dans la question g (c'est $(0,0,1)_{\mathcal{B}} = \phi^2(v)$). L'espace caractéristiques de ϕ pour $\lambda = 0$ est de dimension 2, et égal au noyau de $(\phi - 0\,\mathrm{Id})^2 = \phi^2$. Or pour $c = 0$ on a*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le noyau (décrit par la dernière ligne de A^2) est $\{\, (x,y,z)_{\mathcal{B}} \mid x + y + z = 0 \,\}$. On peut s'arrêter là (on n'a pas demandé une base de l'espace caractéristique), mais on peut rajouter que dans cet espace caractéristique l'espace propre pour $\lambda = 0$ est $\ker \phi$ qui est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $w = (0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$, et qu'on peut compléter w à une base de l'espace caractéristique pour $\lambda = 0$ par tout autre vecteur dans l'espace caractéristique et non lié à w, tel que $(1, 0, -1)_{\mathcal{B}}$.

Fin.