Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 — mercredi 3 octobre 2012, 9h15–10h15

Les documents ne sont pas autorisés.

1. On considère la matrice suivante à coefficients dans $\mathbf{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Indiquer un sous-ensemble de ses 5 colonnes qui forme une famille libre, pendant que les colonnes restantes s'écrivent comme des combinaisons linéaires des colonnes dans cette famille (il n'est pas demandé de préciser ces combinaisons linéaires).

b. Argumenter sans calcul l'existence de solutions *non-nulles* $x \in \mathbf{R}^5$ de l'équation (vectorielle)

$$A \cdot x = \vec{0} \in \mathbf{R}^3.$$

c. Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^5$ formé des solutions de cette équation ?

2. Dans $E = \mathbf{Q}^4$ on considère les deux sous-espaces suivants, qui sont de dimension 2 : $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0, 1, 2, 0)$ et $v_2 = (-2, 0, 2, -3)$, et $W = \{\, (x, y, z, t) \mid x = 2y \text{ et } 3y = z + t \,\}$.

a. Déterminer une base de $V \cap W$.

b. Quelle est la dimension du sous-espace $V + W = \{\, v + w \mid v \in V, w \in W \,\}$ de E ?

3. Soit E l'ensemble des polynômes en x à coefficients complexes et de degré au plus 3.

a. Justifier rapidement que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, et donner sa dimension.

b. Montrer que l'application f définie par $f(P) = (x + \mathbf{i})P'$ (où P' est la dérivée du polynôme P dans le sens habituel, et $\mathbf{i}$ l'unité imaginaire de $\mathbf{C}$) est une application linéaire $E \to E$.

c. Donner la matrice de f par rapport à la base de E formée des monômes x^i (avec $i \leq 3$).

4. Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -8 \\ -8 & -21 & 36 \end{pmatrix}$$

Fin.