Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 3 octobre 2012
9h15–10h15

1. On considère la matrice suivante à coefficients dans $\mathbf{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Indiquer un sous-ensemble de ses 5 colonnes qui forme une famille libre, pendant que les colonnes restantes s'écrivent comme des combinaisons linéaires des colonnes dans cette famille (il n'est pas demandé de préciser ces combinaisons linéaires).

$\surd$ *On peut trouver un tel sous-ensemble par exemple en rejetant des colonnes qui sont une combinaison linéaire des colonnes à leur gauche. Ce n'est pas le cas de chacune des deux premières colonnes, mais c'est le cas pour la troisième (les combinaisons linéaires des deux premières remplissent le sous-espace de dimension* 2 *des colonnes ayant* 0 *comme dernière entrée, quel sous-espace contient la troisième colonne). La quatrième colonne n'est visiblement pas un combinaison linéaire de celles à sa gauche, donc on le maintient. Ainsi on a déjà trois colonnes (numéros* $1, 2, 4$*) qui forment un famille libre; l'espace des colonnes étant de dimension* 3 *la colonne restante* 5 *est forcément une combinaison linéaire des colonnes* $1, 2, 4$.

b. Argumenter sans calcul l'existence de solutions *non-nulles* $x \in \mathbf{R}^5$ de l'équation (vectorielle)

$$A \cdot x = \vec{0} \in \mathbf{R}^3.$$

$\surd$ *Si* $c_1, \ldots, c_5$ *sont les colonnes de* A*, et* $x = (x_1, \ldots, x_5)$*, l'équation devient* $x_1c_1 + \cdots + x_5c_5 = \vec{0}$*, ce qui dit que la combinaison linéaire des colonnes à coefficients* $x_1, \ldots, x_5$ *est nulle, et l'existence d'un telle relation avec au moins un* x_i *non nul veut dire que* $c_1, \ldots, c_5$ *sont liées. Mais on vient de le voir (par exemple* $c_3 = ac_1 + bc_2$ *pour certains* $a, b \in \mathbf{R}$*); d'ailleurs cinq vecteurs dans* $\mathbf{R}^3$ *(c'est à dire plus de vecteurs que la dimension de l'espace) sont forcément liées.*

c. Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^5$ formé des solutions de cette équation ?

$\surd$ *Si* $L_A : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ *est l'application linéaire donnée par multiplication par* A*, ce sous-espace est juste* $\ker L_A$*. Or le théorème du rang dit que* $\dim(\ker L_A) + \operatorname{rg} A = 5$*, et on a* $\operatorname{rg} A = 3$ *car on avait trouvé trois colonnes indépendantes de* A*, et davantage est impossible. Donc* $\dim(\ker L_A) = 2$.

2. Dans $E = \mathbf{Q}^4$ on considère les deux sous-espaces suivants, qui sont de dimension 2 : $V = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0, 1, 2, 0)$ et $v_2 = (-2, 0, 2, -3)$, et $W = \{\, (x, y, z, t) \mid x = 2y \text{ et } 3y = z + t \,\}$.

a. Déterminer une base de $V \cap W$.

$\surd$ *Un vecteur de* V *s'écrit* $av_1 + bv_2$*, et les équations définissant* W *appliquées à ce vecteur donnent* $-2b = 2a$ *et* $3a = (2a + 2b) - 3a$*, qui seront vérifiées si et seulement si* $a + b = 0$*. Donc en prenant* $a = 1 = -b$ *on trouve un vecteur* $b = v_1 - v_2 = (2, 1, 0, 3)$ *est forme tout seul un base de* $V \cap W$.

b. Quelle est la dimension du sous-espace $V + W = \{\, v + w \mid v \in V, w \in W \,\}$ de E ?

$\surd$ *Comme* V, W *sont de dimension* 2 *et* $\dim(V \cap W) = 1$*, on peut trouver des vecteurs* $v \in V$ *tel que* (b, v) *soit une base de* V*, et un vecteur* $w \in W$ *tel que* (b, w) *soit une base de* W*. Alors la famille* (b, v, w) *est génératrice de* $V + W$*, et elle est aussi libre (car* $w \notin \operatorname{Vect}(b, v) = V$*), donc c'est une base de* $V + W$*, et* $\dim(V + W) = 3$.

3. Soit E l'ensemble des polynômes en x à coefficients complexes et de degré au plus 3.

a. Justifier rapidement que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, et donner sa dimension.

$\surd$ *Il s'agit d'une partie de l'espace vectoriel de tous les polynômes en* x *à coefficients complexes. La partie contient le polynôme* 0*, la somme de deux polynômes de degré au plus* 3 *est de degré au plus* 3 *(la partie est fermée pour addition), un multiple scalaire d'un polynôme de degré au plus* 3 *est de degré au plus* 3 *(la partie est fermée pour la multiplication scalaire); on a donc un sous-espace vectoriel.*

b. Montrer que l'application f définie par $f(P) = (x + \mathbf{i})P'$ (où P' est la dérivée du polynôme P dans le sens habituel, et $\mathbf{i}$ l'unité imaginaire de $\mathbf{C}$) est une application linéaire $E \to E$.

$\surd$ *On a* $f(P + Q) = (x + \mathbf{i})(P + Q)' = (x + \mathbf{i})P' + (x + \mathbf{i})Q' = f(P) + f(Q)$ *ainsi que* $f(\lambda P) = (x + \mathbf{i})(\lambda P)' = \lambda f(P)$ *donc* f *est linéaire. Or si* $\deg(P) \leq 3$ *on a* $\deg(P') \leq 2$ *et* $\deg((x + \mathbf{i})P') \leq 3$.

c. Donner la matrice de f par rapport à la base de E formée des monômes x^i (avec $i \leq 3$).

$\surd$ *On a* $f(x^0) = 0$, $f(x) = x + \mathbf{i} = \mathbf{i}x^0 + 1x^1$, $f(x^2) = (x+\mathbf{i})(2x) = 2\mathbf{i}x^1 + 2x^2$, *et* $f(x^3) = (x+\mathbf{i})(3x^2) = 3\mathbf{i}x^2 + 3x^3$. *La matrice de* f *est alors*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -8 \\ -8 & -21 & 36 \end{pmatrix}$$

$\surd$ *Si on désigne par* $\sim$ *la multiplication à gauche par une matrice inversible convenable, on a*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -21 & 36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

d'où la matrice inverse cherchée est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et on vérifie que} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -8 \\ -8 & -21 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fin.