**Corrigé Examen Algèbre Linéaire (L2)** jeudi 9 janvier 2020
8h15–11h15

**1.** Soit $\phi$ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

*a.* Argumenter que $\phi$ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour $\phi$.

4 $\surd$ *Le calcul direct du polynôme caractéristique*

$$\begin{vmatrix} X+4 & -1 & -2 \\ 6 & X-3 & -2 \\ 6 & -5 & X \end{vmatrix}$$

*donne (avec un peu d'effort)* $X^3+X^2(4-3+0)+X(\left|\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 0 \end{smallmatrix}\right|)-\det A = X^3+1X^2+X(-6+12-10)-4 = X^3+X^2-4X-4$. *C'est un peu plus simple si l'on soustrait la première ligne de la seconde, puis, additionne la seconde colonne à la première donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+3 & -1 & -2 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -5 & X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X+3 & -2 \\ 1 & X \end{vmatrix} = (X-2)(X^2+3X+2).$$

*(ce qui après multiplication donne bien sur aussi* $\chi_A = X^3+X^2-4X-4$*). Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant 4 de* $\chi_A$*. Effectivement* $-1$*,* $-2$ *et* $2$ *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3+X^2-4X-4 = (X+1)(X+2)(X-2)$*. Le polynôme caractéristique étant scindé et à racines simples,* $\phi$ *est diagonalisable.*
*Pour* $\lambda=-1$*,* $\lambda=-2$ *et* $\lambda=2$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A+2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 2 \\ -6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

*En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*montrant que chacune a un noyaux de dimension 1, avec comme générateurs respectivement les vecteurs* $(1,1,1)$*,* $(2,2,1)$*, et* $(1,2,2)$*, qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda=-1$*, pour* $\lambda=-2$ *et pour* $\lambda=2$*.*

*b.* Exprimer $A^n$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2 $\surd$ *On choisit les trois vecteurs* $(1,1,1)$*,* $(2,2,1)$*, et* $(1,2,2)$ *comme base* $\mathcal{B}$*, pour lequel la matrice de passage* $P$ *de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*et puisque* $\mathcal{B}$ *est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres* $-1,-2,2$ *on aura* $A = PDP^{-1}$ *pour la matrice diagonale* $D$ *de coefficients diagonaux* $-1,-2,2$*. Alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* $D^n$ *est la matrice diagonale à coefficients diagonaux* $(-1)^n,(-2)^n,2^n$*, ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2a-c & -3a+2b+c & 2a-2b \\ 2a-2c & -3a+2b+2c & 2a-2b \\ 2a-2c & -3a+b+2c & 2a-b \end{pmatrix}$$

*où* $a=(-1)^n$*,* $b=(-2)^n$*,* $c=2^n$*.*

**2.** On considère l'endomorphisme $\phi$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E = \mathbf{C}^4$ de matrice, par rapport à la base canonique,

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

*a.* En utilisant la forme triangulaire en blocs de $M$, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.

1 $\surd$ *En effet* $M$ *est triangulaire en blocs* $2 \times 2$. *On a donc* $\chi_M = \chi_A \chi_B$ *où* $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ *sont les blocs diagonaux de* $M$. *Avec* $\chi_A = \left|\begin{smallmatrix} X-3 & 4 \\ -1 & X+1 \end{smallmatrix}\right|$ *et* $\chi_B = \left|\begin{smallmatrix} X+2 & 1 \\ -6 & X-3 \end{smallmatrix}\right|$ *on obtient* $\chi_M = (X^2 - 2X + 1)(X^2 - X)$.

*b.* Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de $\chi_\phi$. Vous verrez que $\chi_\phi$ possède une racine simple, qu'on appellera $\lambda$, et une racine triple $\nu$.

1 $\surd$ *On a* $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ *et* $X^2 - X = X(X-1)$, *donc* $\chi_\phi = X(X-1)^3$, *et il a* $\lambda = 0$ *comme racine simple et* $\nu = 1$ *comme racine triple.*

*c.* Donner les dimensions des sous-espaces caractéristiques $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$ de $\phi$, sans pour le moment calculer explicitement ces sous-espaces.

1 $\surd$ *Ces dimensions sont les multiplicités de ces valeurs propres comme racine de* $\chi_\phi$, *c'est-à-dire* 1 *respectivement* 3.

*d.* Déterminer l'espace propre $E_\nu$ pour la racine triple. Est-ce que $\phi$ est diagonalisable ?

1 $\surd$ *On a* $E_\nu = \ker(M - 1I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *(après réduction par la méthode de Gauss), sous-espace qui est engendré par le vecteur* $(0,0,1,-3)$. *Comme* $\dim(E_\nu) = 1 < 3 = \dim(\widetilde{E}_\nu)$, *on a* $E_\nu \neq \widetilde{E}_\nu$, *et* $\phi$ *n'est pas diagonalisable.*

*e.* En considérant les dimensions $\dim(\ker((\phi - \nu I)^k))$ pour différents $k \in \mathbf{N}$, déduire la multiplicité $m$ de $\nu$ comme racine du polynôme minimal $\mu_\phi$, et donner ensuite explicitement $\mu_\phi$.

1 $\surd$ *Les matrices* $(M - I)^k$ *représentant* $(\phi - \nu I)^k$ *pour* $k = 2, 3$ *sont respectivement*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -3 & -1 \\ 8 & -20 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

*qui sont de rang* 2 *respectivement* 1, *donnant pour* $\dim(\ker((\phi - I)^k))$ *respectivement* 2 *et* 3. *La valeur maximale* $\dim(\widetilde{E}_\nu) = 3$ *étant seulement atteinte pour* $k = 3$, *d'où* $m = 3$. *Avec aussi la racine simple* $\lambda = 0$, *on trouve* $\mu_\phi = X(X-1)^3$.

*f.* Calculer explicitement des bases du sous-espace propre $E_\lambda = \ker(M - \lambda I)$ (pour la racine simple $\lambda$ de $\chi_\phi$), ainsi que des sous-espaces $\ker(M - \nu I)^k$ pour $k = 1, \ldots, m$ (pour la racine triple $\nu$ de $\chi_\phi$, avec $m$ sa multiplicité dans $\mu_\phi$ trouvée dans la question précédente).

1 $\surd$ *On a* $E_\lambda = \ker(M) = \mathrm{Vect}(0,0,1,-2)$, *et on savait déjà* $\ker(M - I) = \mathrm{Vect}((0,0,1,-3))$. *Ensuite* $\ker((M-I)^2) = \ker\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Vect}((0,0,1,-3),(2,1,0,2))$ *pour* $k = 2$, *et pareillement* $\ker((M-I)^3) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 10 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}((0,0,1,-3),(2,1,0,2),(1,0,0,-4))$ *pour* $k = 3$ *(on a gardé les vecteurs des bases des sous-espaces trouvé auparavant, ce qui sera pratique dans la suite, mais plein d'autres bases peuvent être données ici).*

*g.* Parmi ces sous-espaces, lesquels figurent dans une décomposition en somme directe de l'espace $E$ tout entier ?

1 $\surd$ *On a* $E = \widetilde{E}_\lambda \oplus \widetilde{E}_\nu$, *la décomposition en sous-espaces caractéristiques. Avec* $\widetilde{E}_\lambda = E_0$ *et* $\widetilde{E}_\nu = \widetilde{E}_1 = \ker((\phi - 1I)^3$.

*h.* Donner une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de $\phi$, ainsi que la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

1 $\surd$ *Les bases de* $E_0$ *et* $\widetilde{E}_1$ *trouvées sont déjà adaptées pour former une base de trigonalisation :* $\mathcal{B} = [b_1, \ldots, b_4] = [(0,0,1,-2), (0,0,1,-3), (2,1,0,2), (1,0,0,-4)]$ *On a* $\phi(b_1) = Mb_1 = 0b_1$ *et* $\phi(b_2) = Mb_2 = 1b_2$ *car* $b_1, b_2$ *sont des vecteurs propres pour* $0$ *respectivement pour* $1$. *Or* $(\phi - I)(b_3) = (0,0,-2,6) = -2b_2$ *et* $(\phi - I)(b_4) = (2,1,3,-7) = 3b_2 + b_3$ *montrent respectivement que* $\phi(b_3) = -2b_2 + b_3$ *et* $\phi(b_4) = 3b_2 + b_3 + b_4$, *d'où on a la matrice*

$$T = \mathrm{Mat}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.** Soit $E$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ réelles qui vérifient pour $n \in \mathbf{N}$ la relation $\mathcal{R}$: $a_{n+4} = 2a_{n+3} - 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Une telle suite $a$ est déterminée par ses 4 termes initiaux $a_0, a_1, a_2, a_3$, et il existe une base $\mathcal{E} = [p, q, r, s]$ de $E$ telle que $a = a_0p + a_1q + a_2r + a_3s$, quelle que soit la suite $a \in E$. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme de décalage $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ ; autrement dit la suite $\phi(a)$ est celle donnée par $\phi(a)_n = a_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

*a.* Décrire les suites $p$, $q$, $r$, et $s$ qui forment la base $\mathcal{E}$, et la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi)$ de $\phi$ par rapport à cette base.

1 $\surd$ *Puisque* $p = 1p + 0q + 0r + 0s$ *les 4 termes initiaux* $a_0, a_1, a_2, a_3$ *de la suite* $p$ *sont visiblement* $(1,0,0,0)$ *; il s'agit donc de la suite avec ces termes initiaux et vérifiant* $\mathcal{R}$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$. *De la même façon les suites* $q, r, s$ *sont les suites vérifiant* $\mathcal{R}$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et avec termes initiaux respectivement* $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, *et* $(0,0,0,1)$. *D'après* $\mathcal{R}$, *le terme suivant* $a_4$ *pour ces 4 suites sont respectivement* $-1$, $2$, $-2$, *et* $2$. *Sachant que pour* $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *les 4 termes initiaux de* $\phi(a)_n = a_{n+1}$ *sont* $a_1, a_2, a_3, a_4$, *et que pour les 4 vecteurs de* $\mathcal{E}$ *ces termes donnent les colonnes de la matrice* $A$, *on obtient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

*b.* Montrer que $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ est le polynôme minimal $\mu_\phi$ ; $\phi$ est-il diagonalisable ?

1 $\surd$ *Il est facile à voir que* $\deg \mu_\phi \geq 3$, *par exemple parce qui les vecteurs* $s, \phi(s), \phi^2(s), \phi^3(s)$, *exprimés en coordonnées sur la base* $\mathcal{E}$ *sont échelonnés (dans l'ordre opposé que d'habitude), et qu'ils forment donc une famille libre, et donc* $[\phi^0, \phi, \phi^2, \phi^3]$ *aussi. Or* $\mathcal{R}$ *exprime le fait que le terme* $b_n$ *de la suite* $b = \phi^4(a) - 2\phi^3(a) + 2\phi^2(a) - 2\phi(a) + a$ *est nul, et puisque c'est vrai pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et tout* $a \in E$, *on en déduit* $\phi^4 - 2\phi^3 + 2\phi^2 - 2\phi + I = 0$ *et donc* $\mu_\phi = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2(X^2+1)$. *(On aurait pu également utiliser la connaissance du polynôme minimal d'une matrice compagnon vue en TD, car* $A$ *est la transposée de la matrice compagnon de* $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.*) Par conséquent* $\phi$ *n'est pas diagonalisable car* $\mu_\phi$ *n'est pas à racines simples, ce qui contredit une condition nécessaire pour être diagonalisable. D'ailleurs* $\mu_\phi$ *n'est pas scindé sur* $\mathbf{R}$ *non plus (car* $X^2+1$ *est irréductible dans* $\mathbf{R}[X]$*), ce qui contredit une condition nécessaire.*

*c.* Décomposer $\mu_\phi = PQ$ où $P = (X-1)^k$, pour un certain $k > 0$ et avec $P$ et $Q$ premiers entre eux. En considérant $Q$, conclure que $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre (réelle) de $\phi$.

*1* $\surd$ *$P = (X-1)^2$ et $Q = (X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1)/P = X^2 + 1$. Puisque $Q$ n'a pas de racines réelles, 1 est l'unique racine réelle de $\mu_\phi$ et donc l'unique valeur propre.*

*d.* Trouver une décomposition $E = V \oplus W$ où $V$ et $W$ sont des sous-espaces $\phi$-stables de $E$ (et chacun dimension non nulle).

*1* $\surd$ *Le lemme des noyaux donne une telle décomposition pour $V = \ker(P[\phi])$ et $W == \ker(Q[\phi])$, puisque $PQ = \mu_\phi$ est polynôme annulateur de $\phi$, donc $\ker(PQ[\phi]) = \ker(0) = E$, et $P, Q$ sont premiers entre eux.*

*e.* Trouver des coefficients de Bézout $S, T \in K[X]$ tels que $SP + TQ = 1 = \operatorname{pgcd}(P, Q)$.

*1* $\surd$ *En divisant $Q = X^2+1$ par $P = X^2-2X+1$ on trouve quotient 1 et reste $R = 2X = Q-P$. Division de $Q$ par $R = 2X$ donne quotient $\frac{1}{2}X$ et reste $1 = Q - \frac{1}{2}XR = Q - \frac{1}{2}X(Q-P) = \frac{1}{2}XP + (-\frac{1}{2}X+1)Q$. Ce reste est $\operatorname{pgcd}(P, Q)$, donc $S = \frac{1}{2}X$ et $T = -\frac{1}{2}X + 1$ conviennent.*

*f.* Pour une suite $a \in E$, décrire explicitement les suites $v \in V$ et $w \in W$ tels que $a = v + w$.

*1* $\surd$ *L'écriture $1 = SP + TQ$ donne $I = (SP)[\phi] + (TQ)[\phi]$ où le second terme (qui s'annule sur $W$) est la projection sur $V$ et le premier terme (qui s'annule sur $V$) est la projection sur $W$, selon la décomposition $E = V \oplus W$. On a $(TQ)[\phi] = -\frac{1}{2}\phi^3 + \phi^2 - \frac{1}{2}\phi + I$ et on a donc $v = (TQ)[\phi](a) = (a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} + a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+3})_{n\in\mathbf{N}}$ ; pareil on a $(SP)[\phi] = \frac{1}{2}\phi^3 - \phi^2 + \frac{1}{2}\phi$ et $w = (SP)[\phi](a) = (\frac{1}{2}a_{n+1} - a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+3})_{n\in\mathbf{N}}$. En coordonnées, $v = (a_0 - \frac{1}{2}a_1 + a_2 - \frac{1}{2}a_3)p + (\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_2)q + (\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_3)r + (-\frac{1}{2}a_0 + a_1 - \frac{1}{2}a_2 + a_3)t$.*