Corrigé Examen Algèbre Linéaire (L2) vendredi 14 juin 2019
14h–16h

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 6 & X & -2 \\ -6 & -2 & X \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3 + X^2(-1+0+0) + X(\left|\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 0 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right| - \det A = X^3 - X^2 + X(-6+6-4) - -4 = X^3 - X^2 - 4X + 4$. *C'est un peu plus simple si l'on additionne la dernière ligne de la seconde, puis soustrait la seconde colonne à la dernière, donnant*

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 \\ -6 & -2 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)(X-1)(X-2).$$

(ce qui après multiplication donne bien sur aussi $\chi_A = X^3 - X^2 - 4X + 4$*).*

b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Les racines rationnelles sont diviseurs du coefficient constant* 2 *de* χ_A*. Effectivement* -2, 1 *et* 2 *sont de telles racines, et on a la décomposition* $X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X+2)(X-1)(X-2)$.

c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique étant scindé et à racines simples,* ϕ *est diagonalisable.*
Pour $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 2$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune a un noyaux de dimension 1*, avec comme générateurs respectivement les vecteurs* $(0,1,-1)$, $(1,-2,2)$, *et* $(1,-2,1)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = -2$, *pour* $\lambda = 1$ *et pour* $\lambda = 2$.

d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On choisit les trois vecteurs* $(0,1,-1)$, $(1,-2,2)$, *et* $(1,-2,1)$ *comme base* $\mathcal{B}$, *pour lequel la matrice de passage* P *de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *et son inverse sont*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\mathcal{B}$ *est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres* $-2,1,2$ *on aura* $A = PDP^{-1}$ *pour la matrice diagonale* D *de coefficients diagonaux* $-2,1,2$. *Alors* $A^n = PD^nP^{-1}$ *où* D^n *est la matrice diagonale à coefficients diagonaux* $(-2)^n, 1^n, 2^n$, *ce qui donne*

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} b & b-c & b-c \\ 2a-2b & a-2b+2c & -2b+2c \\ -2a+2b & -a+2b-c & +2b-c \end{pmatrix}$$

où $a = (-2)^n$, $b = 1^n = 1$, $c = 2^n$.

2. *a.* Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\mathrm{pgcd}(11414, 3601)$.

$\surd$ *En écrivant '%' le reste après division euclidienne :* $11414 \,\%\, 3601 = 611$, $3601 \,\%\, 611 = 546$, $611 \,\%\, 546 = 65$, $546 \,\%\, 65 = 26$, $65 \,\%\, 26 = 13$, $26 \,\%\, 13 = 0$ *donc* $\mathrm{pgcd}(11414, 3601) = 13$.

b. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $d = \mathrm{pgcd}(199, 52)$ et trouver $s, t \in \mathbf{Z}$ tels que $d = 199s + 52t$.

$\surd$ $199 \,\%\, 52 = 43 = 199 - 3 \times 52$, $52 \,\%\, 43 = 9 = -1 \times 199 + 4 \times 52$, $43 \,\%\, 9 = 7 = 5 \times 199 - 19 \times 52$, $9 \,\%\, 7 = 2 = -6 \times 199 + 23 \times 52$, $7 \,\%\, 2 = 1 = 23 \times 199 - 88 \times 52$ *et c'est clairement le* pgcd, *donc* $s = 23$ *et* $t = -88$ *conviennent.*

3. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$, est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -11 & -6 & -6 & 0 \\ 20 & 11 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.

$\surd$ *En effet* M *est triangulaire en blocs* 2×2. *On a donc* $\chi_M = \chi_A \chi_B$ *où* $A = \left(\begin{smallmatrix} -11 & -6 \\ 20 & 11 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $B = \left(\begin{smallmatrix} -9 & 5 \\ -20 & 11 \end{smallmatrix}\right)$ *sont les blocs diagonaux de* M. *Avec* $\chi_A = \left|\begin{smallmatrix} X+11 & 6 \\ -20 & X-11 \end{smallmatrix}\right|$ *et* $\chi_B = \left|\begin{smallmatrix} X+9 & -5 \\ 20 & X-11 \end{smallmatrix}\right|$ *on obtient* $\chi_M = (X^2-1)(X^2-2X+1)$.

b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.

$\surd$ *On a* $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ *et* $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, *donc* $\chi_\phi = (X+1)(X-1)^3$, *et il a* $\lambda = -1$ *comme racine simple et* $\nu = 1$ *comme racine triple.*

c. Déterminer des bases des sous-espaces propres E_λ et E_ν. En considérant les dimensions de ces sous-espaces, conclure si ϕ est diagonalisable ou non.

$\surd$ *On a* $E_\lambda = E_{-1} = \ker(M+I) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(après réduction par la méthode de Gauss), et de façon similaire* $E_\nu = \ker(M-I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, *sous-espaces qui sont respectivement engendrés par le vecteur* $(-3,5,0,0)$, *et par les vecteurs* $(-1,2,0,0)$ *et* $(0,-1,1,2)$. *Comme* $\dim(E_\nu) = 2 < 3 = \dim(\widetilde{E}_\nu)$, *on a* $E_\nu \neq \widetilde{E}_\nu$, *et* ϕ *n'est pas diagonalisable.*

d. Déterminer des bases des sous-espaces $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$, qui étendent (si nécessaire) les bases de E_λ respectivement de E_ν de la question précédente.

$\surd$ *Les dimensions des sous-espaces caractéristiques sont données par les multiplicités respectives de leurs valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique, c'est à dire* $\dim(\widetilde{E}_\lambda) = 1$ *et* $\dim(\widetilde{E}_\nu) = 3$. *La base* $[(-3,5,0,0)]$ *de* E_λ *est donc déjà une base de* $\widetilde{E}_\lambda$, *mais la base* $[(-1,2,0,0),(0,-1,1,2)]$ *a besoin d'être complétée par un troisième vecteur. Pour cela on peut calculer* $\widetilde{E}_\nu = \ker((M-I)^2) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ *et rajouter comme troisième vecteur un vecteur quelconque de ce sous espace mais pas dans le sous-espace engendré par les deux premiers vecteurs. Un tel vecteur est* $(0,0,2,5)$, *et* $[(-1,2,0,0),(0,-1,1,2),(0,0,2,5)]$ *est donc une base convenable de* $\widetilde{E}_\nu$.

e. En mettant ensemble, dans un ordre convenable, les vecteurs des deux bases de la question précédente, on peut obtenir une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de M. En précisant $\mathcal{B}$, donner la matrice triangulaire $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$\surd$ *On prend* $\mathcal{B} = [(-3,5,0,0),(-1,2,0,0),(0,-1,1,2),(0,0,2,5)]$. *Si l'on appelle* $b_1,\dots,b_4$ *ses vecteurs, on sait que* $\phi(b_1) = -b_1$ *(car* $b_1 \in E_{-1}$*), ainsi que* $\phi(b_2) = b_2$ *et* $\phi(b_2) = b_2$ *(car* $b_2, b_3 \in E_1$*), donc il reste à exprimer* $\phi(b_4)$ *comme combinaison linéaire de* $[b_2,b_3,b_4]$, *sachant que* $\phi(b_4) - b_4 \in E_1 = \mathrm{Vect}(b_2,b_3)$. *En fait* $\phi(b_4) - b_4 = (-12,19,5,10) = 12b_2 + 5b_3$. *On obtient*

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin.