Contrôle continu Algèbre Linéaire (L2) mercredi 7 novembre 2018
8h15–10h15

La consultation du cours écrit, ainsi que de vos notes personnelles, est autorisée. L'utilisation d'une calculatrice, ou de tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = 3a_n + 2a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 8 premiers termes de cette suite.

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

3. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace des polynômes en X de degré < 4. On définit un endomorphisme ϕ de E par $\phi : P \mapsto (1+X)P'$, où P' est la dérivée de P (par rapport à X, au sens de l'analyse) ; puisque $\deg(P) < 4$ entraîne $\deg(P') < 3$, on a $\deg((1+X)P') < 4$, et l'application ϕ est bien définie $E \to E$; on admet que c'est une application linéaire.

a. Donner la matrice A de ϕ par rapport à la base canonique $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

b. Montrer que ϕ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres (on ne demande pas de trouver une base de vecteurs propres).

c. On pose $P = 2X + 3X^2 + X^3$, $Q = 1 + X$ et $V = \mathrm{Vect}(P, Q)$ (deux vecteurs particuliers dans E, et le sous-espace qu'ils engendrent). Montrer que V est un sous-espace ϕ-stable, et que $[P, Q]$ est une base de V.

d. Donner la matrice $B = \mathrm{Mat}_{[P,Q]}(\phi|_V)$ de la restriction à V de ϕ, par rapport à la base $[P, Q]$ de V.

e. Trouver les valeurs propres de cette restriction $\phi|_V$, ainsi qu'une base de V formée de vecteurs propres (toujours pour $\phi|_V$).

Fin.