Contrôle continu Algèbre Linéaire mercredi 3 octobre 2018
9h–10h

Consultation du cours écrit, et de vos notes personnelles, est autorisée. Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

Les deux exercices sont indépendants.

1. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

2. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. Dans E on considère la famille de vecteurs (c'est-à-dire de polynômes) $[Q, R, S, T]$, où

$$\begin{aligned} Q &= -2 + 7X \qquad\quad + X^3 \\ R &= -5 + 11X + X^2 \\ S &= \ \ 4 - X - 2X^2 + 3X^3 \\ T &= \ \ 1 + 3X - X^2 + 2X^3 \end{aligned}$$

L'application $f : K^4 \to E$ est définie par $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 Q + x_2 R + x_3 S + x_4 T$.

a. Argumenter que f est une application linéaire.
b. Donner la matrice qui exprime f par rapport aux bases canoniques de K^4 (au départ) et de $E = K[X]_{<4}$ (à l'arrivée ; cette dernière base est $[1, X, X^2, X^3]$).
c. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
d. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
e. On définit une autre application linéaire, $g : E \to K^3$, par $g : P \mapsto (P[-1], P[0], P[1])$ (les trois composantes du résultat sont des évaluations de P), et ensuite la *restriction* $g|_{\mathrm{Im}(f)}$ de g à l'image de f. Donner la matrice de cette restriction $g|_{\mathrm{Im}(f)}$, par rapport à la base de $\mathrm{Im}(f)$ trouvée dans la question précédente (au départ) et la base canonique de K^3 (à l'arrivée).

Fin.