Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 3 octobre 2018
9h–10h

1. Déterminer la matrice inverse (si elle existe) de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer les étapes de la méthode que vous utilisez pour la calculer, et n'oubliez pas de vérifier votre résultat (au moins sur votre brouillon) en le multipliant par A.

$\surd$ *Voici une transformation de $(A \mid I_4)$ en $(I_4 \mid A^{-1})$ par opérations sur les lignes, où l'on fait attention à privilégier des valeurs ± 1 comme pivot, et à annuler, une fois obtenus les pivots, tous les autres entrées dans la colonne ; ainsi les divisions nécessaires ne sont fait qu'au dernier moment. (Tout cela n'est pas obligatoire, mais dans la pratique le calcul avec les nombres rationnels est beaucoup plus propice à commettre des erreurs que celui avec les entiers.)*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5| & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2| & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5| & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -4| & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3| & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1| & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4| & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1| & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1| & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1| & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0| & -8 & 7 & 18 \\ 0 & 1 & 0| & 5 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1| & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

Donc l'inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 18 \\ 5 & -4 & -11 \\ 6 & -5 & -13 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $E = K[X]_{<4}$ l'espace vectoriel des polynômes en X de degré plus petit que 4. Dans E on considère la famille de vecteurs (c'est-à-dire de polynômes) $[Q, R, S, T]$, où

$$\begin{aligned} Q &= -2 + 7X \qquad + X^3 \\ R &= -5 + 11X + X^2 \\ S &= \ \ 4 - X - 2X^2 + 3X^3 \\ T &= \ \ 1 + 3X - X^2 + 2X^3 \end{aligned}$$

L'application $f : K^4 \to E$ est définie par $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 Q + x_2 R + x_3 S + x_4 T$.

a. Argumenter que f est une application linéaire.

$\surd$ *Cet application est un exemple d'une application définie sur un espace K^n qui utilise les coefficients de son argument (un n-uplet de scalaires) comme coefficients d'une combinaison linéaire des vecteurs d'une faille fixe, ici $[Q, R, S, T]$; une telle application est toujours linéaire.*

b. Donner la matrice qui exprime f par rapport aux bases canoniques de K^4 (au départ) et de $E = K[X]_{<4}$ (à l'arrivée ; cette dernière base est $[1, X, X^2, X^3]$).

√

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & 1 \\ 7 & 11 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

√ *Par des opérations sur les lignes on transforme la matrice de la question précédente en*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 11 & -22 & -11 \end{pmatrix}$$

dont les deux dernières lignes sont multiples de la second ligne, donc on peut les annuler par d'autres opérations sur les lignes. Il reste un système 2×4 *échelonné, qui a donc une solution avec* $4 - 2 = 2$ *paramètres pour lesquels on peut choisir les variables* x_3, x_4 *pour les deux dernières colonnes. En prenant* $x_3 = 1$ *et* $x_4 = 0$ *on trouve un générateur* $(-3, 2, 1, 0)$ *de* $\mathrm{Ker}(f)$*, et en prenant* $x_4 = 1$ *et* $x_3 = 0$ *on trouve un autre générateur* $(-2, 1, 0, 1)$*. Ces deux vecteurs forment une base de* $\mathrm{Ker}(f)$*.*

d. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

√ *Les deux vecteurs trouvés correspondent aux relations* $-3Q + 2R + S = 0$ *et* $-2Q + R + T = 0$ *qui permettent d'exprimer* S *et* T *en termes de* Q *et* R*, et on a donc* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(Q, R, S, T) = \mathrm{Vect}(Q, R)$*. Or* $[Q, R]$ *est une famille libre, et donc une base de* $\mathrm{Im}(f)$*.*

e. On définit une autre application linéaire, $g : E \to K^3$, par $g : P \mapsto (P[-1], P[0], P[1])$ (les trois composantes du résultat sont des évaluations de P), et ensuite la *restriction* $g|_{\mathrm{Im}(f)}$ de g à l'image de f. Donner la matrice de cette restriction $g|_{\mathrm{Im}(f)}$, par rapport à la base de $\mathrm{Im}(f)$ trouvée dans la question précédente (au départ) et la base canonique de K^3 (à l'arrivée).

√ *On a* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$*, donc la matrice cherchée sera de taille* 3×2*, et ses* 2 *colonnes sont les images* $g(Q)$*,* $g(R)$ *des vecteurs de la base utilisée de* $\mathrm{Im}(f)$*. On calculer facilement* $g(Q) = (-10, -2, 6)$ *et* $g(R) = (-15, -5, 7)$*, donc la matrice cherchée est*

$$\begin{pmatrix} -10 & -15 \\ -2 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Fin.