Contrôle continu 6L23 : Arithmétique dans les anneaux vendredi 16 mars 2012
10h00–12h00

Le polycopié ou un résumé du cours sont autorisés comme documents.

1. Dans cette partie on fixe $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et on étudiera les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

a. Rappeler pourquoi les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont en bijection avec les idéaux de $\mathbf{Z}$ contenant $n\mathbf{Z}$ (il suffit de citer un résultat général). Décrire concrètement quels sont ces idéaux de $\mathbf{Z}$, et de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

b. Soit d un diviseur de n, exhiber soigneusement un isomorphisme entre les deux anneaux quotient $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})/(d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

Soit $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ la factorisation de n, avec p_i des nombres premiers distincts, et les $k_i > 0$.

c. Déduire de la question b une description des idéaux premiers de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en termes des p_i.

d. Calculer Nilrad($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$), l'intersection de tous les idéaux premiers de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, en fonction des p_i.

e. Donner un morphisme d'anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/p_1^{k_1}\mathbf{Z}) \times \cdots \times (\mathbf{Z}/p_r^{k_r}\mathbf{Z})$, et montrer que c'est un isomorphisme.

f. En déduire que l'image $\bar{x}$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de $x \in \mathbf{Z}$ est nilpotent si et seulement si chaque p_i divise x (dans $\mathbf{Z}$). Comparer l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et l'ensemble Nilrad($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$).

2. Soit K un corps commutatif. On rappelle que $K[X, X^{-1}]$ désigne l'anneau des polynômes de Laurent en X à coefficients dans K. Tout élément de $K[X, X^{-1}]$ peut être écrit sous la forme d'une somme $\sum_{i=-N}^{N} a_i X^i$ avec les $a_i \in K$, et N suffisamment grand (mais fini), et on a les définitions naturelles de l'addition et de la multiplication de telles expressions (notamment on a $X \cdot X^{-1} = X^0 = 1$). On considérera ici l'anneau $K[X]$ comme un sous-anneau de $K[X, X^{-1}]$ (pour $P \in K[X]$, son coefficient de X^i est nul pour tout $i < 0$).

a. Montrer que pour tout $L \in K[X, X^{-1}]$ non nul, il existe un unique $i \in \mathbf{Z}$ et $P \in K[X]$ avec coefficient constant non nul, tels que $L = X^i P$.

b. Dans cette situation montrer que L est inversible dans $K[X, X^{-1}]$ si et seulement si P est inversible dans $K[X]$. Décrire ensuite l'ensemble des éléments inversibles de $K[X, X^{-1}]$.

On propose maintenant de montrer que $K[X, X^{-1}]$ est un anneau principal (c'est-à-dire que tous ses idéaux sont des idéaux principaux). Soit donc J un idéal de $K[X, X^{-1}]$.

c. Expliquer pourquoi il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $J \cap K[X]$ soit l'idéal principal (P) de $K[X]$ engendré par P.

d. Expliquer que $PK[X, X^{-1}]$, c'est-à-dire l'idéal principal de $K[X, X^{-1}]$ engendré par P, est inclus dans J.

e. Réciproquement, soit $Q \in J \subseteq K[X, X^{-1}]$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $X^k Q \in J \cap K[X]$.

f. En déduire que $Q \in PK[X, X^{-1}]$, et conclure.

Fin.