**Corrigé Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 7** 9 avril 2009

**1.** Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites non parallèles d'un plan affine euclidien $\mathcal{A}$ (donc $\dim(\mathcal{A}) = 2$), et $P$ leur point d'intersection.

*a.* Supposons que $\mathcal{B}$ est une droite de $A$ telle que $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, c'est-à-dire la réflexion par rapport à $\mathcal{B}$ intervertit les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Montrer que $P \in \mathcal{B}$.

$\surd$ *Comme toute réflexion $S$ vérifie $S \circ S = \mathrm{id}$, la condition $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ entraîne aussi $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$, et $S_{\mathcal{B}}$ intervertit bien $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Mais cela implique que $S_{\mathcal{B}}(P)$, qui est à la fois sur $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ et sur $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$, est égal à $P$, et comme les seuls points fixes de $S_{\mathcal{B}}$ sont ceux de $\mathcal{B}$, on conclut $P \in \mathcal{B}$.*

*b.* Montrer qu'il existe précisément deux droites différentes $\mathcal{B}$ (qui sont appelées les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$), telles que $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

$\surd$ *On vient de voir qu'une telle droite $\mathcal{B}$ passe forcément par $P$. La réflexion $S_{\mathcal{B}}$ doit donc conserver la distance vers $P$, c'est-à-dire $d(A, P) = d(S_{\mathcal{B}}(A), P)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Le cercle $\Gamma = \mathcal{S}(P, 1)$ coupe chacune des droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ en deux points opposés par rapport à $P$ et les quatre point sont distincts car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont que le point $P$ en commun), c'est-à-dire il existe des vecteurs unitaires $u \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $v \in \overrightarrow{\mathcal{D}'}$ tels que $\mathcal{D} \cap \Gamma = \{P + u, P - u\}$ et $\mathcal{D}' \cap \Gamma = \{P + v, P - v\}$. Comme $S_{\mathcal{B}}$ envoie $\mathcal{D}$ sur $D'$ et conserve la distance vers $P$, il envoie $P + u$ soit vers $P + v$ soit vers $P - v$. Dans les deux cas $\mathcal{B}$ est la droite médiatrice du point $P + u$ et de son image par $S_{\mathcal{B}}$. Or la réflexion par rapport à la médiatrice de $P + u$ et $P + v$, comme celle par rapport à la médiatrice de $P + u$ et $P - v$, envoie deux points distincts de $\mathcal{D}$ (à savoir $P, P + u$) sur deux points distincts de $\mathcal{D}'$ (à savoir $P, P + v$, respectivement $P, P - v$), et les deux médiatrices possèdent donc la propriété $S_{\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.*

*c.* En choisissant une demi-droite d'extrémité $P$ dans chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, disons $\mathcal{D}_+$ et $\mathcal{D}'_+$, montrer que la réflexion $S_{\mathcal{B}}$ par rapport à l'une des bissectrices envoie $\mathcal{D}_+$ sur $\mathcal{D}'_+$, pendant que la réflexion par rapport à l'autre bissectrice envoie $\mathcal{D}_+$ sur la demi-droite opposée $\mathcal{D}'_-$ de $\mathcal{D}'_+$. On convient d'appeler $\mathcal{B}_1$ la bissectrice telle que $S_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{D}_+) = \mathcal{D}'_+$, et $\mathcal{B}_2$ l'autre bissectrice.

$\surd$ *On peut supposer que les choix des demi-droites correspondent à ceux des vecteurs unitaires: $\mathcal{D}_+ = P + \mathbf{R}u$, et $\mathcal{D}'_+ = P + \mathbf{R}v$. Alors la réflexion dans la médiatrice de $P + u$ et $P + v$ envoie $\mathcal{D}_+$ sur $\mathcal{D}'_+$, et celle dans la médiatrice de $P + u$ et $P - v$ envoie $\mathcal{D}_+$ sur la demi-droite opposée $\mathcal{D}'_-$.*

*d.* Montrer que la composée $S_{\mathcal{B}_2} \circ S_{\mathcal{B}_1}$ est égale à la symétrie centrale $S_P$ par rapport au point $P$. En déduire que les deux bissectrices sont orthogonales l'une à l'autre.

$\surd$ *Les deux réflexions fixent $P$, et $S_{\mathcal{B}_1}$ envoie $P + u \mapsto P + v$ et $P + v \mapsto P + u$ pendant que $S_{\mathcal{B}_1}$ envoie $P + u \mapsto P - v$ et $P + v \mapsto P - u$. Il en résulte que la composée $S_{\mathcal{B}_2} \circ S_{\mathcal{B}_1}$ fixe $P$ et envoie $P + u \mapsto P - u$ et $P + v \mapsto P - v$, autrement dit elle envoie le repère affine $(P, P + u, P + v)$ sur le repère affine $(P, P - u, P - v)$ tout comme le fait la symétrie centrale $S_P$ ; comme une application affine est déterminée pas son image d'un repère affine, les deux applications sont identiques. Pour en déduire que les deux bissectrices sont orthogonales, il suffit de concentrer sur les points de $\mathcal{B}_1$ : le facteur à droite de la composée $S_{\mathcal{B}_2} \circ S_{\mathcal{B}_1}$ fixe tous ces points, donc le facteur à gauche doit avoir le même effet sur ces points que la symétrie centrale $S_P$, ce qui veut dire que $\mathcal{B}_1$ est orthogonal à l'axe $\mathcal{B}_2$ de cette seconde réflexion.*

*e.* Montrer que $\{\, A \in \mathcal{A} \mid d(A, \mathcal{D}) = d(A, \mathcal{D}') \,\} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

$\surd$ *Soit $p, p'$ les projections orthogonales sur $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ respectivement, donc par définition $d(A, \mathcal{D}) = d(A, p(A))$ et $d(A, \mathcal{D}') = d(A, p'(A))$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Pour un point $A \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, disons $A \in \mathcal{B}_i$, la réflexion $S_{\mathcal{B}_i}$ fixe $A$ et envoie $p(A) \mapsto p'(A)$ (car l'image $P = S_{\mathcal{B}_i}(p(A))$ possède les propriétés qui caractérisent $p'(A)$, à savoir $P \in \mathcal{D}'$ et avoir $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{\mathcal{D}'}$), et comme $S_{\mathcal{B}_i}$ est une isométrie il s'ensuit que $d(A, \mathcal{D}) = d(A, \mathcal{D}')$. Ceci montre que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est inclus dans $\{\, A \in \mathcal{A} \mid d(A, \mathcal{D}) = d(A, \mathcal{D}') \,\}$ ; montrons ensuite l'inclusion opposée. On suppose donc $A$ tel que $d(A, \mathcal{D}) = d(A, \mathcal{D}')$, et on peut que $d(A, \mathcal{D}) > 0$ (car $d(A, \mathcal{D}) = d(A, \mathcal{D}') = 0$ n'est possible que dans le cas triviale $A = P$). Les points $p(A)$ et $p'(A)$ sont équidistants à la fois de $A$ (par hypothèse) et de $P$ (car d'après Pythagore $d(A, p(A))^2 + d(p(A), P)^2 = d(A, P)^2 = d(A, p'(A))^2 + d(p(A)', P)^2$), donc la droite $\mathcal{D}_{P,A}$ est la médiatrice de $p(A)$ et $p'(A)$. La réflexion par rapport à cette médiatrice fixe donc $P$ et envoie $p(A) \mapsto p'(A)$ ; par conséquent elle envoie $\mathcal{D}_{P,p(A)} = \mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_{P,p'(A)} = \mathcal{D}'$, donc la médiatrice est l'une des bissectrices $\mathcal{B}_i$, et elle contient $A$. (Les droites $\mathcal{D}_{P,p(A)}$ et $\mathcal{D}_{P,p'(A)}$ sont bien définies car $d(P, p(A)) = 0 = d(P, p'(A))$ n'est possible que si $A = P$, cas qui était déjà exclu.)*

*f.* Montrer que les angles de droites $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_1})$ et $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_2})$ sont les deux solutions dans le groupe des angles de droites de l'équation $2\alpha = (\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'})$ en $\alpha$.

$\surd$ *Pour les deux bissectrices on a $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_i}) = -(\widehat{\mathcal{D}',\mathcal{B}_i})$ (car l'image par une réflexion (ici $S_{\mathcal{B}_i}$) d'un angle de droites donne l'angle opposé), et donc $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_i}) = (\widehat{\mathcal{B}_i,\mathcal{D}'})$, d'où $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'}) = 2(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_i})$*

*g.* Montrer que les angles de droites $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_1})$ est l'*unique* solution dans le groupe $\mathcal{AD}$ des angles de droites de l'équation $\tilde{2}(\alpha) = (\widehat{\mathcal{D}_+,\mathcal{D}'_+})$, où $\tilde{2}$ désigne l'application du groupe des angles de droites vers le groupe des angles de demi-droites correspondant au doublement de l'angle (l'unicité correspond au caractère bijectif de cette application).

$\surd$ *Soit $w$ un des deux vecteurs unité dans $\overrightarrow{\mathcal{B}_1}$. La réflexion $S_{\mathcal{B}_1}$ envoie un angle de vecteurs vers l'angle opposé, donc $(\widehat{u,w}) = -(\widehat{v,w}) = (\widehat{w,v})$ et $2(\widehat{u,w}) = (\widehat{u,v}) = (\widehat{\mathcal{D}_+,\mathcal{D}'_+})$, ce qui implique $\tilde{2}(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_1}) = (\widehat{\mathcal{D}_+,\mathcal{D}'_+})$. On sait que $\tilde{2}$ est bijectif, donc il n'y a pas d'autres solutions $\alpha$ (angle de droites) pour l'équation $\tilde{2}(\alpha) = (\widehat{\mathcal{D}_+,\mathcal{D}'_+})$ ; en particulier $\alpha = (\widehat{\mathcal{D},\mathcal{B}_2})$ n'est pas une solution car le calcul ci-dessus avec $\mathcal{B}_1$ remplacé par $\mathcal{B}_2$ a pour résultat $(\widehat{u,-v}) = (\widehat{u,v}) + \varpi$ au lieu de $(\widehat{u,v})$.*

*h.* Pour le sommet $A$ d'un triangle $A, B, C$, on appelle bissectrices issues du sommet celles des droites $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{A,C}$, dont on appelle bissectrice intérieure celle des demi-droites $A + \mathbf{R}_{>0}\overrightarrow{AB}$ et $A + \mathbf{R}_{>0}\overrightarrow{AC}$ (d'après la question précédente). Montrer que pour chaque paire de bissectrices issues de $A, B$ est concourante avec l'une des bissectrices issues de $C$ (on a donc 4 points d'intersection de 3 bissectrices chacun), et que les 3 bissectrices intérieures sont concourantes.

$\surd$ *Comme montré dense le point e, la réunion des bissectrices de deux droites forme l'ensemble de points équidistants aux deux droites. Quand deux bissectrices issues de sommets différents se rencontrent, le point d'intersection est donc équidistant à une paire de côtés du triangle et à une autre paire ; le deux paire ont un côté commun, donc le point est équidistant aux trois côtés à la fois, d'où il est aussi sur l'une des bissectrices issues du troisième sommet.*
*Montrer le fait que quand les deux bissectrices qui se rencontrent sont intérieurs les troisième est aussi intérieur nécessite un peu plus de travail, car il faut un caractérisation pratique de la condition d'être bissectrice intérieure. Un possibilité pour le faire est d'observer que pour tout point $P \neq A$ de la bissectrice intérieure issue du sommet $A$, les deux derniers coordonnées barycentriques de $P$ par rapport au repère affine $(A, B, C)$ (c'est-à-dire le coordonnées correspondants aux sommets autre que $A$) ont toujours le même signe, pendant que sur la bissectrice extérieur ces signes sont opposés (le montrer est laissé ici comme exercice au lecteur). Ainsi quand deux bissectrices intérieures se rencontrent, les signes des trois coordonnées seront tous égaux (et positifs, car la somme des coordonnées doit être 1), et on est aussi sur la bissectrice intérieure issue du troisième sommet.*

**2.** Soit $\Gamma = \mathcal{S}(\Omega, r)$ avec $r \geq 0$ une sphère (ou cercle si la dimension est 2) dans l'espace affine euclidien $\mathcal{A}$ (avec $\dim \mathcal{A} \geq 2$), on appelle **puissance d'un point $A$ par rapport à** $\Gamma$ le nombre $P_\Gamma(A) = d(A,\Omega)^2 - r^2$. On remarque que $P_\Gamma(A) = 0$ si et seulement si $A \in \Gamma$. Soit $A \in \mathcal{A}$ quelconque.

*a.* Montrer que l'intersection de $\Gamma$ avec une droite quelconque possède au plus deux points.

$\surd$ *Supposons que $\Gamma \cap \mathcal{D}$ contienne au moins 3 points distincts $A$, $B$, $C$. Alors $\Omega$, ayant la même distance des trois points, doit être sur l'hyperplan médiateur de $A$ et $B$ et aussi sur l'hyperplan médiateur de $B$ et $C$ ; or les directions des deux plan sont toutes les deux $\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$, donc les hyperplans sont parallèles, et ils ne coïncident pas car les images de $B$ sous réflection dans les deux hyperplans sont respectivement $A$ et $C$. Les hyperplans sont donc disjoints, contredisant que $\Omega$ est dans leur intersection.*
*On peut aussi calculer plus concrètement $\Gamma \cap \mathcal{D}$. En général, pour un sous-espace affine $\mathcal{V}$ on peut considérer la projection orthogonale $\omega = p_\mathcal{V}(\Omega)$ du centre de $\Gamma$ sur $\mathcal{V}$, et sa distance $d = d(\Omega,\mathcal{V}) = d(\Omega,\omega)$. Si $d > r$ tout point de $\mathcal{V}$ a une distance $> r$ de $\Omega$, donc $\Gamma \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Si $d \leq r$ on a pour $A \in \mathcal{V}$ que $d(A,\Omega)^2 = d(A,\omega)^2 + d^2$ d'après Pythagore, et donc $\Gamma \cap \mathcal{V} = \{\, A \in \mathcal{V} \mid d(A,\omega)^2 = r^2 - d^2 \,\}$, ce qu'on pourra noter $\mathcal{S}_\mathcal{V}(\omega, \sqrt{r^2 - d^2})$. Dans le cas où $\mathcal{V}$ est une droite, cette "sphère" dans $\mathcal{V}$ possède 2 points (ou 1 point si $d = r$).*

*b.* Soit $P, Q \in \Gamma$ diamétralement opposés ($\overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{\Omega Q}$). Montrer que $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle = P_\Gamma(A)$.

$\surd$ *C'est un résultat du cours. Si $\vec{x} = \overrightarrow{A\Omega}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{\Omega Q}$ alors $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = d(A,\Omega)^2 - r^2 = P_\Gamma(A)$.*

*c.* Dans cette situation, soit $R$ le point tel que $\mathcal{D}_{A,P} \cap \Gamma = \{P, R\}$ (on aura $P = R$ si et seulement si la droite $\mathcal{D}_{A,P}$ est tangente à $\Gamma$). Montrer que $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR} \rangle = P_\Gamma(A)$.

$\surd$ *On montre d'abord que $\overrightarrow{RQ} \perp \overrightarrow{AP}$. Si $R \neq P$ c'est une conséquence de $\langle \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ} \rangle = P_\Gamma(R) = 0$, car $\overrightarrow{AP}$ est un multiple de $\overrightarrow{RP}$. Si $R = P$, la droite $\mathcal{D}_{A,P}$ est tangente à $\Gamma$, c'est-à-dire leur intersection est réduite à un point qui est la projection de $\Omega$ sur $\mathcal{D}_{A,P}$, et $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{R\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}$. Alors on peut calculer $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR} \rangle = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{RQ} \rangle = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle - \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{RQ} \rangle = P_\Gamma(A) - 0 = P_\Gamma(A)$.*

*d.* En déduire qu'on peut caractériser la puissance d'un point $A$ par rapport à $\Gamma$ comme la valeur constante de $\langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AT} \rangle$ pour toute paire de points $S, T$ obtenue comme $\{S, T\} = \mathcal{D} \cap \Gamma$ pour une droite $\mathcal{D}$ passant par $A$ (comme $\Gamma \neq \emptyset$, une telle droite au moins existe toujours).

$\surd$ *On peut prendre $P = S$ et $Q = \Omega + \overrightarrow{P\Omega}$ pour se trouver dans la situation précédente avec $R = T$.*

*e.* Soit $\Delta$ une autre sphère (ou cercle), non concentrique avec $\Gamma$ (c'est-à-dire de centre $\Omega' \neq \Omega$). On pose $V = \{\, A \in \mathcal{A} \mid P_\Gamma(A) = P_\Delta(A) \,\}$, ensemble qu'on appelle **l'axe radical** des sphères (ou cercles) $\Gamma$ et $\Delta$. Montrer que $V$ est un hyperplan (et donc une droite si $\mathcal{A}$ est un plan) orthogonal à la droite $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$.

$\surd$ *On a $P_\Gamma(A) - P_\Delta(A) = \langle \overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{A\Omega} \rangle - r^2 - \langle \overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{A\Omega'} \rangle + s^2 = \langle \overrightarrow{\Omega'\Omega}, 2\overrightarrow{AM} \rangle + c$ où $s$ est le rayon de $\Delta$, $c = s^2 - r^2$ et $M = \mathrm{bar}(\Omega, \Omega')$ ; c'est une application affine de $A$, dont l'application linéaire associée $v \mapsto \langle \overrightarrow{\Omega'\Omega}, 2\vec{v} \rangle$ a pour noyau $\langle \overrightarrow{\Omega'\Omega} \rangle^\perp$, donc l'ensemble $V$ où l'application affine s'annule est un hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$.*

*f.* Supposons que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Expliquer que dans ce cas on peut caractériser l'axe radical comme l'unique hyperplan $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{H} \cap \Gamma = \Gamma \cap \Delta = \mathcal{H} \cap \Delta$. Décrire pour $\dim \mathcal{A} = 2$ cet axe dans les cas où les cercles $\Gamma$ et $\Delta$ se coupent en deux ou en un seul point.

$\surd$ *Il découle des définitions que tout point dans l'intersection de deux parmi $\Gamma$, $\Delta$, et $V$ est aussi dans le troisième, d'où $V$ vérifie la description. Pour l'unicité d'un tel $\mathcal{H}$, on distingue le cas où $\Gamma \cap \Delta = \Gamma \cap \Delta \cap V$ est réduit à un point $P$ ou non. Dans le premier cas la condition $\mathcal{H} \cap \Gamma = \{P\}$ a pour unique solution $\mathcal{H} = V$ l'hyperplan tangent en $P$ à $\Gamma$. Dans le second cas $\mathcal{H} \subseteq \Gamma \cap \Delta$ a pour unique solution $\mathcal{H} = V$, car $\mathrm{Aff}(\Gamma \cap \Delta) = V$ (une sphère de rayon positif dans un sous-espace engendre affinement tout le sous-espace : pour tout point du sous-espace il y a une droite passant par le point et par le centre de la sphère, qui coupe la sphère en deux points et est affinement engendré par ces deux points). Dans le cas de deux cercles $V$ est soit la droite tangente au point commun de $\Gamma$ et $\Delta$ si celui-ci est unique, soit la droite définie par leurs points d'intersection s'il y en a deux. Il est clair que deux cercles ne peuvent se couper en plus que deux points, car on a vu $\Gamma \cap \Delta = \Gamma \cap \Delta \cap V = \Gamma \cap V$, quel ensemble a au plus deux points d'après le point a.*

*g.* Supposons maintenant que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$, et que $\Gamma$ et $\Delta$ sont de rayon positif (donc non réduit à un point). Justifier la procédure suivante pour construire un point $X$ de l'axe radical (qui permettra ensuite de décrire l'axe comme l'hyperplan orthogonal à $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$ et passant par $X$). On se ramène d'abord au cas $\dim \mathcal{A} = 2$ en choisissant dans le cas contraire un plan $\mathcal{P}$ qui coupe $\Gamma$ et $\Delta$, et en se restreignant à ce plan (donc $\Gamma$ et $\Delta$ seront remplacés par leurs intersections avec $\mathcal{P}$ ; montrer que $P_\Gamma(A) = P_{\Gamma\cap\mathcal{P}}(A)$ pour tout point $A \in \mathcal{P}$). Dans ce plan on choisit un cercle arbitraire $\mathcal{C}$ qui coupe $\Gamma$ et $\Delta$ chacun en deux points distincts, disons $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{A, B\}$ et $\mathcal{C} \cap \Delta = \{C, D\}$, avec $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ non parallèles (on pourra admettre l'existence d'un tel $\mathcal{C}$). Alors ces deux droites se coupent en un point de l'axe radical de $\Gamma$ et $\Delta$ : $\mathcal{D}_{A,B} \cap \mathcal{D}_{C,D} = \{X\}$.

$\surd$ *Si $\mathcal{P}$ est un plan qui coupe $\Gamma$ et $\Delta$, on pourra calculer la puissance d'un point quelconque $A \in \mathcal{P}$ en utilisant une droite comprise dans $\mathcal{P}$, et il est donc clair que $P_\Gamma(A) = P_{\Gamma\cap\mathcal{P}}(A)$. On pourra en plus s'assurer que ni $\mathcal{P} \cap \Gamma$ ni $\mathcal{P} \cap \Delta$ sont réduit à un point, en choisissant un plan passant par les deux centres des sphères. Désormais on travaille dans le plan. Si $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{A, B\}$ et $\mathcal{C} \cap \Delta = \{C, D\}$, on sait que pour $P \in \mathcal{D}_{A,B}$ on a $P_\Gamma(P) = P_\mathcal{C}(P)$, et pour $P \in \mathcal{D}_{C,D}$ on a $P_\mathcal{C}(P) = P_\Delta(P)$, donc si $\mathcal{D}_{A,B} \cap \mathcal{D}_{C,D} = \{X\}$ on a $P_\Gamma(X) = P_\mathcal{C}(X) = P_\Delta(X)$ et $X$ est un point de l'axe radical de $\Gamma$ et $\Delta$ comme voulu.*

*Pour voir qu'un bon cercle $\mathcal{C}$ peut toujours être choisi, remarquons d'abord que si $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ sont parallèles, c'est aussi le cas pour les droites médiatrices de $A, B$ et de $C, D$, et comme le centre de $\mathcal{C}$ est sur les deux médiatrices, elles doivent être confondues, et égales à $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$. Pour éviter cette condition on pourra commencer par choisir $A, B \in \Gamma$ non échangés par la symétrie $S_{\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}}$, et puis choisir un point $C \in \Delta \setminus \mathcal{D}_{A,B}$. On prend alors pour $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit de $A, B, C$ ; ce cercle coupe $\Gamma$ en $A$ et $B$, et $\Delta$ au moins en $C$. Normalement il a un deuxième point d'intersection $D$ avec $\Delta$ qui sera comme ci-dessus ; si par malchance $\mathcal{C}$ est tangent à $\Delta$ en $C$ on pourrait y remédier en changeant le choix de $C$, mais à limite on pourra aussi faire avec $\mathcal{C}$, et utiliser la tangente à $\Delta$ en $C$ au lieu de la droite $\mathcal{D}_{C,D}$.*

**3.** Soit $A, B, C$ les sommets d'un triangle dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On a précédemment montré que les trois droites définies par un sommet et le milieu des deux autres sommets sont concourantes (dans l'isobarycentre des trois sommets), et les trois bissectrices intérieures du triangle sont également concourantes (dans le centre du cercle inscrit du triangle). On considérera ici deux autres ensembles de trois droites concourantes; celles-ci sont orthogonales chacune à l'un des côtés du triangle.

*a.* Soit $M_1$, $M_2$, et $M_3$, les médiatrices respectives des paires de sommets $\{B, C\}$, $\{C, A\}$, et $\{A, B\}$. Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point $\Omega$, et que les trois sommets se trouvent sur un même cercle de centre $\Omega$. On appelle ce cercle le **cercle circonscrit** du triangle, et on appelle (évidemment) $\Omega$ le centre du cercle circonscrit.

$\surd$ *Une médiatrice de deux points est orthogonal à la droite passant par ces points. Si deux des médiatrices étaient parallèles, alors les deux droites passant par les paires de points correspondantes seraient aussi parallèles, et même confondues (car ces deux paires ont un point commun), contredisant le fait que $A, B, C$ ne sont pas alignés. Comme on est dans le plan, chaque paire de médiatrices se coupe donc en un point. Soit $\Omega$ le point d'intersection de $M_1$ et $M_2$, alors on a $d(\Omega, B) = d(\Omega, C) = d(\Omega, A)$, donc $\Omega \in M_3$, et les trois droites sont bien concourantes en $\Omega$.*

*b.* Les **hauteurs** $h_A$, $h_B$, et $h_C$ du triangle $A, B, C$ sont les droites passant respectivement par $A$, $B$, et $C$, et orthogonales au côté opposé. On définit les points auxiliaires $A_2 = C - A + B = C + \overrightarrow{AB} = B + \overrightarrow{AC}$, $B_2 = A - B + C$ et $C_2 = B - C + A$. Montrer que les hauteurs sont respectivement les médiatrices de $\{B_2, C_2\}$, $\{C_2, A_2\}$, et $\{A_2, B_2\}$. Conclure que les hauteurs sont concourantes. Leur point d'intersection s'appelle l'**orthocentre** du triangle $A, B, C$.

$\surd$ *On a $A + \overrightarrow{BC} = B_2$ et $A - \overrightarrow{BC} = C_2$ d'où $A = \operatorname{bar}(B_2, C_2)$ et la droite $\mathcal{D}_{B_2,C_2}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$. Alors la hauteur $h_A$ est orthogonal à $\mathcal{D}_{B_2,C_2}$, et donc la médiatrice de $\{B_2, C_2\}$. Des arguments similaires montrent que $h_B$ est la médiatrice de $\{C_2, A_2\}$, et $h_C$ la médiatrice de $\{A_2, B_2\}$. On a vue que ces médiatrices sont concourantes.*

*c.* Montrer que l'isobarycentre $M$ de $A_2, B_2, C_2$ coïncide avec celui de $A, B, C$. Montrer que l'homothétie $h_{M,-2}$ envoie le triangle $A, B, C$ sur $A_2, B_2, C_2$, qu'elle envoie le triangle $a, b, c$ formé des milieux de $\{B, C\}$, $\{C, A\}$, et $\{A, B\}$ sur $A, B, C$, et finalement le centre $\Omega$ du cercle circonscrit de $A, B, C$ vers son orthocentre $H$.

$\surd$ *Soit $M = \operatorname{bar}(A, B, C)$ de sorte que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Alors $\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA_2} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_2} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{BA_2} + \overrightarrow{CB_2} + \overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, et donc $M = \operatorname{bar}(A_2, B_2, C_2)$. Alors on a $\overrightarrow{MA_2} = -\overrightarrow{MB_2} - \overrightarrow{MC_2} = -2\overrightarrow{M \operatorname{bar}(B_2, C_2)} = -2\overrightarrow{MA}$, et donc $h_{M,-2}(A) = A_2$ ; $h_{M,-2}(B) = B_2$ et $h_{M,-2}(C) = C_2$ sont obtenus de façon similaire. Puis $a = \operatorname{bar}(B, C)$ donne $h_{M,-2}(a) = \operatorname{bar}(h_{M,-2}(B), h_{M,-2}(C)) = \operatorname{bar}(B_2, C_2) = A$, etc. Finalement, comme l'homothétie $h_{M,-2}$ multiplie toutes les distances par 2, il envoie le centre $\Omega$ du cercle circonscrit de $A, B, C$ vers le centre $H$ du cercle circonscrit de $A_2, B_2, C_2$ (et le dernier cercle aura un rayon 2 fois plus grand que le premier).*

*d.* Conclure que $M = \operatorname{bar}((\Omega, 2), (H, 1))$, et donc en particulier que $\Omega$, $M$, et $H$ sont alignés. Si ces trois points ne son pas confondus (c'est-à-dire si $A, B, C$ n'est pas un triangle équilatéral), on appelle la droite $\mathcal{D}_{M,\Omega}$ définie par ces points la **droite d'Euler**.

$\surd$ *On vient de constater $h_{M,-2}(\Omega) = H$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{M\Omega}$, et $\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{M\Omega} = \vec{0}$ donne $M = \operatorname{bar}((H, 1), (\Omega, 2))$.*

*e.* Soit $\omega = \operatorname{bar}(\Omega, H)$. Montrer que $h_{M,-2}(\omega) = \Omega$, en en déduire que $d(\omega, a) = d(\omega, b) = d(\omega, c)$. Soit $r = d(\omega, a)$, et $\Gamma = \mathcal{S}(\omega, r)$. Montrer que $h_{H,2}$ envoie $\Gamma$ sur le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ de $A, B, C$, et que les milieux de $\{H, A\}$, $\{H, B\}$, et $\{H, C\}$ sont donc aussi situés sur $\Gamma$. On appelle $\Gamma$ le **cercle d'Euler**.

$\surd$ *En calculant par rapport au point $M$ on a $\overrightarrow{M\omega} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{MH}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M\Omega}$, d'où $h_{M,-2}(\omega) = \Omega$. Comme l'homothétie $h_{M,-2}$ multiplie toutes les distances par 2 et envoie $\omega \mapsto \Omega$, $a \mapsto A$, $b \mapsto B$, et $c \mapsto C$, on a $d(\omega, a) = d(\omega, b) = d(\omega, c) = \frac{1}{2}d(\Omega, A) = \frac{1}{2}d(\Omega, B) = \frac{1}{2}d(\Omega, C)$. Le fait $\omega = \operatorname{bar}(\Omega, H)$ s'exprime aussi comme $\overrightarrow{H\Omega} = 2\overrightarrow{H\omega}$ donc l'homothétie $h_{H,2}$ envoie $\omega \mapsto \Omega$ et elle multiplie toutes les distances par 2 (ell a ces deux propriétés en commun avec $h_{M,-2}$). Alors $h_{H,2}$ envoie (aussi) $\Gamma = \mathcal{S}(\omega, r)$ sur $\mathcal{S}(\Omega, 2r) = \mathcal{C}$. Les images réciproques pour $h_{H,2}$ des points $A$, $B$, $C$ de $\mathcal{C}$ sont $h_{H,\frac{1}{2}}(A) = \operatorname{bar}(H, A)$, $h_{H,\frac{1}{2}}(B) = \operatorname{bar}(H, B)$, et $h_{H,\frac{1}{2}}(C) = \operatorname{bar}(H, C)$, qui sont donc situées sur $\Gamma$.*

*f.* Soit $\alpha, \beta, \gamma$ les points tels que $h_A \cap \mathcal{C} = \{A, \alpha\}$, $h_B \cap \mathcal{C} = \{B, \beta\}$, et $h_C \cap \mathcal{C} = \{A, \gamma\}$. Montrer que le *pied* $H_A$, qui est le point tel que $h_A \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{H_A\}$, vérifie $H_A = \mathrm{bar}(\alpha, H)$. [Indication : considérer la réflexion $R$ dans la médiatrice de $A$ et $\alpha$, suivi de la réflexion dans la droite $\mathcal{D}_{B,C}$ ; montrer que cette composée envoie $A \mapsto H$.] Les autres pieds $H_B$, $H_C$ sont définis de façon similaire et vérifieront pour des raisons similaires $H_B = \mathrm{bar}(\beta, H)$ et $H_C = \mathrm{bar}(\gamma, H)$. Montrer que le cercle d'Euler passe aussi par ces trois pieds.

$\surd$ *Comme $A$ et $\alpha$ sont situés sur la droite $h_A$ qui est orthogonal à $\mathcal{D}_{B,C}$, la médiatrice de $A$ et $\alpha$ est parallèle à cette droite, et la composée de réflexions est une translation par un vecteur $2\vec{v}$ dans la direction de $h_A$, tel que la translation par $\vec{v}$ transforme la médiatrice de $A$ et $\alpha$ en $\mathcal{D}_{B,C}$. Comme $A$ et $\alpha$ sont sur le cercle $\mathcal{C}$ centré en $\Omega$, ce point est sur la médiatrice de $A$ et $\alpha$. Or la droite parallèle à $h_A$ passant par $\Omega$ est $\mathcal{D}_{\Omega,a}$ (la médiatrice de $B$ et $C$), donc $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega a}$. La composée des deux réflexions est donc la translation par $2\overrightarrow{\Omega a}$, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AH}$ comme on voit en appliquant $h_{M,-2}$. Donc la composée envoie effectivement $A \mapsto H$ ; comme la première réflexion envoie $A \mapsto \alpha$, la deuxième doit envoyer $\alpha \mapsto H$. Cela implique que $H_A = \mathrm{bar}(\alpha, H)$, car $H_A$ est sur l'axe de la réflexion et sur la droite $h_A$. On a montré que $h_{H,2}(H_A) = \alpha \in \mathcal{C}$ ce qui entraîne $H_A \in \Gamma$. Les arguments montrant $H_B \in \Gamma$ et $H_C \in \Gamma$ sont similaires.*