Corrigé Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 5 27 mars 2009

1. La définition des applications affines est telle qu'elles conservent «toutes les relations particulières» qu'on peut exprimer dans le langage des espaces affines. Par exemple si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est une application affine, et $B = \operatorname{bar}((A,\lambda),(C,\mu))$ pour $A, C \in \mathcal{A}$ et $\lambda, \mu \in K$ alors on aura aussi $f(B) = \operatorname{bar}((f(A),\lambda),(f(C),\mu))$ (cette «conservation des barycentres» est une des caractérisations des applications affines. On montrera explicitement quelques de ces propriétés. Soit donc $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est une application affine.

a. Montrer que pour trois points alignés A, B, C, leurs images $f(A), f(B), f(C)$ sont aussi alignés (c'est-à-dire contenus dans une droite affine).

$\surd$ *Si A, B, C sont alignés il existe un vecteur $\vec{v}$ et scalaires λ, μ tels que $B = A + \lambda\vec{v}$ et $C = A + \mu\vec{v}$. Comme f est affine il existe $\vec{f} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(A + \vec{x}) = f(A) + \vec{f}(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in E$, et il en découle que $f(B) = f(A) + \vec{f}(\lambda\vec{v}) = f(A) + \lambda\vec{y}$ où $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, et $f(C) = f(A) + \mu\vec{y}$, ce qui montre que $f(A), f(B), f(C)$ sont alignés. On pourrait aussi raisonner plus simplement il existe ν tel que $B = \operatorname{bar}((A, 1-\nu),(C,\nu))$, et alors $f(B) = \operatorname{bar}((f(A), 1-\nu),(f(C),\nu))$ car f conserve les barycentres ; le seul bémol de cet argument est que cette écriture ne marche pas si $A = C \neq B$, mais dans ce cas $f(A) = f(C)$ et il est clair qu'alors $f(A), f(B), f(C)$ seront toujours alignés.*

b. Montrer que si deux sous-espaces affines se coupent, leurs images par f se coupent aussi.

$\surd$ *C'est évident pour n'importe quelle application f : l'image d'un élément de l'intersection sera dans l'intersection des images, qui sera donc non vide. (Ce qui est particulier pour les applications affines est que ces images des sous-espaces sont des sous-espaces affines ; pour une application quelconque on ne pourra affirmer aucune propriété particulière d'une telle image, à part d'être non vide.)*

c. Montrer que si deux sous-espaces affines sont parallèles, leur images par f le sont aussi.

$\surd$ *Pour chaque paire de points A, B dans un sous-espace $\mathcal{V}$, on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$, donc la direction de $f(\mathcal{V})$ est l'image par $\vec{f}$ de la direction de $\mathcal{V}$. Par conséquent pour deux sous-espace parallèles (avec la même direction), leurs images auront aussi la même direction, et sont donc parallèles.*

d. Supposons maintenant que f est bijectif. Montrer que l'application réciproque $f^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ est alors aussi une application affine (on appellera un tel f un isomorphisme affine). En déduire que dans ce cas on a les énoncés réciproques que ceux des points *a,b,c* ; par exemple si pour deux sous-espaces $\mathcal{V}, \mathcal{V}$ leurs images $f(\mathcal{V}), f(\mathcal{V})$ se coupent, alors $\mathcal{V}, \mathcal{V}$ se coupent eux-mêmes.

$\surd$ *On sait que pour une application ϕ linéaire et inversible entre deux espaces vectoriels, l'application réciproque ϕ^{-1} est aussi linéaire (rappel de l'argument: si $s, t \in E'$ et $\lambda, \mu \in K$, on a pour $x = \phi^{-1}(s)$ et $y = \phi^{-1}(t)$ par linéarité de ϕ que $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y) = \lambda s + \mu t$, et en appliquant ϕ^{-1} à cette équation on obtient $\phi^{-1}(\lambda s + \mu t) = \lambda x + \mu y = \lambda\phi^{-1}(s) + \mu\phi^{-1}(t)$). On applique cela pour $\phi = \vec{f}$ pour obtenir un candidat ϕ^{-1} pour l'application linéaire associée à f^{-1} ; il faut montrer que pour $A \in \mathcal{A}$ et $\vec{x} \in E$ on ait l'équation $f^{-1}(A + \vec{x}) = f^{-1}(A) + \phi^{-1}(\vec{x})$. Comme f est une bijection, il suffit de montrer l'équation obtenue en appliquant f aux deux membres, c'est-à-dire $A + \vec{x} = f(f^{-1}(A) + \phi^{-1}(\vec{x}))$. Mais f est affine, donc le second membre de cette équation est égal à $f(f^{-1}(A)) + \vec{f}(\phi^{-1}(\vec{x})) = A + \vec{x}$, la valeur cherchée.*
Les énoncés réciproques pour les points a,b,c sont une conséquence directe, par exemple si $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont alignés, on peut appliquer l'application affine f^{-1} et le résultat du point a pour obtenir $f^{-1}(f(A))$, $f^{-1}(f(B))$ et $f^{-1}(f(C))$ alignés, c'est-à-dire A, B et C alignés.

e. Décrire des exemples qui montrent que ces énoncés réciproques ne sont pas vrais quand f est une application affine quelconque (on pourra prendre pour f une projection affine, et trouver des droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ telles que $f(\mathcal{D})$ et $f(D')$ soient parallèles sans que $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ soient parallèles.

$\surd$ *En considérant la projection d'une espace de dimension 3 sur un sous-espace de dimension 2, donnée pour un certain repère affine $\mathcal{R}$ par $(x,y,z)_{\mathcal{R}} \mapsto (x,y,0)_{\mathcal{R}}$, on peut constater que les images de $A = (0,0,0)_R r$, $B = (1,0,0)_{\mathcal{R}}$ et $C = (2,0,7)$ sont alignés pendant que A, B, C ne le sont pas ; que les images des droites $\mathcal{D}_1 = \{\, (x,0,0)_{\mathcal{R}} \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $D'_1 = \{\, (0,y,5)_{\mathcal{R}} \mid y \in \mathbf{R} \,\}$ se coupent pendant que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_1$ ne le font pas ; que les images des droites $\mathcal{D}_2 = \{\, (x,0,x)_{\mathcal{R}} \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $D'_2 = \{\, (x,1,-5x)_{\mathcal{R}} \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ sont parallèles pendant que $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ ne le sont pas.*

f. Qu'est-ce qu'on peut dire concernant ces dernières questions si f est injectif ?

$\surd$ *Pour les énoncés des points a,b,c, la globalité de l'espace d'arrivée $\mathcal{A}'$ n'intervient pas, donc les énoncés restent les mêmes si l'on remplace f par l'application $\mathcal{A} \to \mathrm{Im}(f)$ définie par $A \mapsto f(A)$ (par rapport à f, on a simplement oublié les vecteurs qui e sont pas dans $\mathrm{Im}(f)$). Ainsi on a remplacé l'application affine quelconque f par une application affine surjective, et si f était injective, elle est remplacée par une application affine bijective. Ainsi le résultat du point e est aussi valable quand f est injectif.*

2. Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{E})$ un repère cartésien dans $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{E}$ soit une base orthonormée de E. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{A}$, donné en coordonnées cartésiennes comme $\mathcal{H} = \{\, (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = b \,\}$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, b \in \mathbf{R}$. On pose $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{R}} \in E$.

a. Vérifier que $\mathcal{H} = \{\, O + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = b \,\}$ et montrer que $\vec{\alpha} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\perp}$.

$\surd$ *Sur la base $\mathcal{E}$ on a $\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = \langle (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{E}}, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{E}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, ce qui établit la description de $\mathcal{H}$. En écrivant des points $A, B \in \mathcal{H}$ comme $A = O + \vec{v}$ et $B = O + \vec{w}$, on a $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{\alpha} \rangle = \langle \vec{w} - \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = b - b = 0$, donc $\vec{\alpha}$ est orthogonal à chaque vecteur de la direction de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire $\vec{\alpha} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}^{\perp}$.*

b. Soit $A = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}$, et $P = p_{\mathcal{H}}(A)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{H}$; on pose $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$. Montrer que $\|\vec{v}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle|}{\|\alpha\|}$ et que $\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - b$.

$\surd$ *Par définition de la projection, $\vec{v}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\perp} = \langle \alpha \rangle$. Si $\lambda \in \mathbf{R}$ est tel que $v = \lambda \alpha$, alors $\|v\| = |\lambda| \, \|\alpha\| = \frac{|\langle v, \alpha \rangle|}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \|\alpha\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle|}{\|\alpha\|}$. Or si $P = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{R}}$ on a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = b$ car $P \in \mathcal{H}$, et on trouve $\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - b$.*

c. Conclure que la distance du point A au hyperplan $\mathcal{H}$ est donnée par $d(A, \mathcal{H}) = \frac{|\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - b|}{\|\alpha\|}$.

$\surd$ *Par définition $d(A, \mathcal{H}) = d(A, P) = \|\vec{v}\| = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle|}{\|\alpha\|} = \frac{|\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - b|}{\|\alpha\|}$.*

d. On partitionne le complément $\mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ de l'hyperplan en deux parties $D^+ = \{\, O + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle > b \,\}$ et $D^- = \{\, O + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle < b \,\}$. On définit le *segment* $[A, B]$ entre deux points $A, B \in \mathcal{A}$ par $[A, B] = \{\, \mathrm{bar}((A, 1 - t), (B, t)) \mid 0 \leq t \leq 1 \,\}$. Montrer que A et B appartiennent à la même partie (D^+ ou D^-) si et seulement si $[A, B] \cap \mathcal{H} = \emptyset$. [Indication: une application *affine* f préserve les barycentres, et vérifie donc $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$, où comme d'habitude $f([A, B])$ désigne $\{\, f(P) \mid P \in [A, B] \,\}$. Dans ce point et les deux suivants il s'agit de trouver des applications affines $\mathcal{A} \to \mathbf{R}$ telles que $\mathcal{H}$ s'écrive $\mathcal{H} = f^{-1}(z)$ pour une constante $z \in \mathbf{R}$.] (La description de ce point montre que la *partition* $\{D^+, D^-\}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ ne dépend que de $\mathcal{H}$, et non pas de l'équation choisie (c'est-à-dire de α), même si les *noms* D^+ et D^- dépendent de ce choix.)

$\surd$ *L'application $f : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ donnée par $f(A) = \langle \overrightarrow{OA}, \vec{\alpha} \rangle$ est affine, avec $\vec{f}(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{\alpha} \rangle$, et on a vu que $\mathcal{H} = f^{-1}(b)$. On a $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$, et A et B appartiennent à différentes parties si et seulement si cet intervalle contient b (c'est-à-dire $f(A) < b < f(B)$ ou $f(B) < b < f(A)$, car $A, B \notin \mathcal{H}$ entraîne $f(A), f(B) \neq b$). Or il existe $C \in [A, B] \cap \mathcal{H}$ si et seulement si $b \in f([A, B])$.*

e. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{H}$, et $A_0 \notin \mathcal{H}$, de sorte que $\mathcal{S} = (A_0, \ldots, A_n)$ soit un repère affine de $\mathcal{A}$. Montrer qu'un point $(x_0, \ldots, x_n)_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ appartient à la même parte que A_0 si et seulement si $x_0 > 0$.

$\surd$ *L'application $(x_0, \ldots, x_n)_{\mathcal{S}} \mapsto x_0$ est affine, et $\mathcal{H}$ est l'image réciproque de 0 ; le reste est pareil.*

f. Le choix du repère $\mathcal{S}$ permet d'orienter $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ en appelant la base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ directe (N.B. cette base n'est pas orthonormée). Montrer que $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ est «du même côté» de $\mathcal{H}$ que A si et seulement si la base $(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BA_2}, \ldots, \overrightarrow{BA_n})$ est directe.

$\surd$ *L'application $\mathcal{A} \to \mathbf{R} : B \mapsto \det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BA_2}, \ldots, \overrightarrow{BA_n})$ s'annule précisément sur $\mathcal{H}$, encore une fois il suffit de montrer qu'elle est affine. Or $\det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BA_2}, \ldots, \overrightarrow{BA_n}) = \det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{A_1 A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1 A_n})$, et cette expression est linéaire en son premier argument $\overrightarrow{BA_1}$: l'application considérée est affine.*