Examen 6L19 : Géométrie jeudi 10 mai 2012
9h00–12h00

Le polycopié du cours est le seul document admis. Tous les résultats du cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités. Vous pouvez utiliser dans une question les résultats des questions précédentes, même si vous ne les avez pas démontrés.

Les trois parties sont indépendantes

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. La droite passant par deux points distincts X, Y est notée (XY) (c'est $\mathcal{D}_{X,Y}$ dans le polycopié).

1. Soit Γ un cercle du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, et A, B, C, D quatre points distincts situés sur Γ, et tels que $[C, D]$ forme un diamètre de Γ (donc le centre de Γ se trouve sur (CD)).

a. Montrer que les droites (AC) et (AD) sont perpendiculaires.

b. Soit $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à (CD). Montrer que $\mathcal{D}$ coupe les droites (AC) et (BC), chacune en un point unique.

c. On appelle P le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (AC), et Q le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (BC). Montrer que les quatre points A, B, P, Q sont cocycliques.

d. En déduire le résultat suivant: si ABC est un triangle non aplati de $\mathcal{P}$, et si on choisit des points $P \in (AC)$ et $Q \in (BC)$ distincts de A, B, C, alors A, B, P, Q sont cocycliques si et seulement si (PQ) est perpendiculaire à la droite $(C\Omega)$, où Ω est le centre du cercle circonscrit de ABC.

e. Soit ABC est un triangle de $\mathcal{P}$, non aplati, et non rectangulaire en C. Soit $H_A \in (BC)$ le pied de la hauteur de ABC issue de A, et $H_B \in (AC)$ le pied de la hauteur de ABC issue de B. Montrer que $(H_A H_B)$ est parallèle à la droite tangente en C au cercle circonscrit de ABC.

2. Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On désigne par $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$ les distances entre ces points.

a. Montrer que $p \leq q + r$.

b. Montrer qu'on a également $q - r \leq p$ et $r - q \leq p$, autrement dit qu'on a $|q - r| \leq p$.

On appelle les inégalités $|q-r| \leq p \leq q+r$ obtenues dans ces questions les « inégalités triangulaires ». Elles sont équivalentes à $|r - p| \leq q \leq r + p$ ou encore à $|p - q| \leq r \leq p + q$ (vous pouvez sans démonstration les utiliser sous l'une de ces formes si cela vous semble utile).

c. On suppose $B \neq A \neq C$, et on fixe une orientation du plan $\mathcal{P}$. Soit $\phi \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Montrer que

$$\cos\phi = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}.$$

[Indication : on pourra choisir une base de E convenable et calculer en coordonnées.]

On fixe maintenant des nombres $p, q, r > 0$ vérifiant les inégalités triangulaires ; on cherche à montrer que réciproquement il existe des points A, B, C du plan tels que $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$. On commence par choisir $A \in \mathcal{P}$ quelconque, et $B \in \mathcal{P}$ tel que $d(A, B) = p$, ce qui est certainement possible.

d. Montrer que si au moins une des inégalités triangulaires est une égalité, c'est-à-dire si $|q-r| = p$ ou $p = q + r$, alors il existe un point unique $C \in (AB)$ tel que $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$.

e. On suppose désormais les inégalités triangulaires strictes, c'est-à-dire $|q-r| < p < q+r$. Montrer que

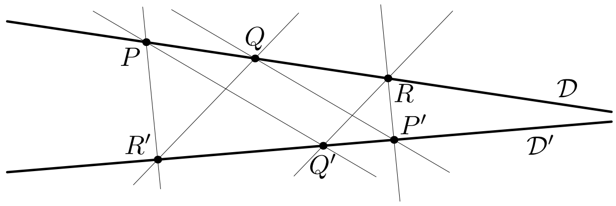
$$-1 < \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq} < +1.$$

f. Utiliser les résultats trouvés pour montrer qu'il existe précisément deux choix différents pour $C \in \mathcal{P}$ tels que A, B, C forme un triangle non aplati avec $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$.

 continué au verso

3. Dans cette partie on démontrera le théorème de Pappus, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème de Pappus. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine $\mathcal{A}$, et des points $P, Q, R \in \mathcal{D}$ et $P', Q', R' \in \mathcal{D}'$ sur ces deux droites (dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent, ces points sont supposés tous distincts du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si (PQ') est parallèle à (QP'), et (PR') est parallèle à (RP'), alors (QR') est parallèle à (RQ').*



Les questions *a,b* démontrent ce théorème dans le *plan* affine, ce qui est le cas principal.

a. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

b. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point S. [Indication: on pourra utiliser le théorème de Thalès.]

Les questions *c,d* ont pour but de montrer que l'énoncé ci-dessus reste vrai même si $\dim \mathcal{A} > 2$. N'abordez ces deux dernières questions que s'il vous reste du temps. On vous demande d'y vérifier soigneusement que, dans tous les cas de figure, soit on peut trouver un plan qui contient toute la configuration donnée, et dans lequel on peut donc appliquer le résultat déjà établi, soit il y a différents points et/ou droites confondus, de sorte que l'énoncé devienne trivialement vrai.

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{A}$ est quelconque, et que les points P, Q, R ne sont pas tous égaux. Déduire alors des hypothèses $(PQ') \parallel (QP')$ et $(PR') \parallel (RP')$ que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

d. En déduire le théorème de Pappus dans le cas général.

Fin.