Corrigé Examen 6L19 : Géométrie jeudi 16 juin 2011
9h00–12h00

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un plan affine $\mathcal{A}$. On utilisera dans cet exercice soit des coordonnées cartésiennes, soit des coordonnées barycentriques (vous pouvez choisir celles que vous préférez); dans le premier cas on se servira du repère cartésien $(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}))$, dans le second cas du repère affine (A, B, D) correspondant.

a. Donner les coordonnées des sommets du parallélogramme, et décrire par une équation en coordonnées ses côtés ainsi que sa diagonale (AC).

$\surd$ *Pour* $\mathcal{R} = (A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}))$ *on a*

$$\begin{aligned} A &= (0,0)_\mathcal{R} \\ B &= (1,0)_\mathcal{R} \\ C &= (1,1)_\mathcal{R} \\ D &= (0,1)_\mathcal{R} \end{aligned} \quad \textit{et} \quad \begin{aligned} (AB) &= \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid y = 0 \,\} \\ (BC) &= \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid x = 1 \,\} \\ (CD) &= \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid y = 1 \,\} \\ (DA) &= \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid x = 0 \,\} \\ (AC) &= \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid x = y \,\} \end{aligned}.$$

Pour $\mathcal{S} = (A, B, D)$ *on a*

$$\begin{aligned} A &= (1,0,0)_\mathcal{S} \\ B &= (0,1,0)_\mathcal{S} \\ C &= (-1,1,1)_\mathcal{S} \\ D &= (0,0,1)_\mathcal{S} \end{aligned} \quad \textit{et} \quad \begin{aligned} (AB) &= [0,0,1]_\mathcal{S} \\ (BC) &= [1,0,1]_\mathcal{S} \\ (CD) &= [1,1,0]_\mathcal{S} \\ (DA) &= [0,1,0]_\mathcal{S} \\ (AC) &= [0,1,-1]_\mathcal{S} \end{aligned} \quad .$$

b. Soit $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ des droites, avec $\mathcal{D}_1$ parallèle aux côtés (AB) et (CD) du parallélogramme et distinct de ces côtés, et avec $\mathcal{D}_2$ parallèle aux côtés (BC) et (AD) du parallélogramme et distinct d'eux. Décrire ces deux droites par des équations en coordonnées, où pour chaque droite $\mathcal{D}_i$, l'équation qui la décrit contient un paramètre (qui correspond à la position inconnue de $\mathcal{D}_i$). Quelles sont les valeurs possibles pour ces paramètres ?

$\surd$ $\mathcal{D}_1 = \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid y = p \,\} = \{\, (t,x,y)_\mathcal{S} \mid y = p \,\}$ *et* $\mathcal{D}_2 = \{\, (x,y)_\mathcal{R} \mid x = q \,\} = \{\, (t,x,y)_\mathcal{S} \mid x = q \,\}$, *où* $t + x + y = 1$ *est sous-entendu pour* $(t,x,y)_\mathcal{S}$. *Les valeurs possibles pour* p *comme pour* q *sont celles de* $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$.

c. Soit F, H les points intersection de $\mathcal{D}_1$ avec les côtés (AD) et (BC), respectivement, et G, E les points intersection de $\mathcal{D}_2$ avec les côtés (AB) et (CD), respectivement. Décrire les coordonnées de ces points, en termes des paramètres introduits dans la question précédente.

$\surd$

$$\begin{aligned} E &= (q,1)_\mathcal{R} = (-q,q,1)_\mathcal{S}, \\ F &= (0,p)_\mathcal{R} = (1-p,0,p)_\mathcal{S}, \\ G &= (q,0)_\mathcal{R} = (1-q,q,0)_\mathcal{S}, \\ H &= (1,p)_\mathcal{R} = (-p,1,p)_\mathcal{S}. \end{aligned}$$

d. Décrire en coordonnées les droites (EF) et (GH) (toujours en termes des paramètres choisis).

$\surd$ *En écrivant* $[k,l,m]_S = \{\, (t,x,y)_S \mid kt + lx + my = 0 \,\}$, *on a*

$$\begin{aligned} (EF) &= \{\, (x,y) \mid (p-1)x + qy = pq \,\} = [pq, 1 + pq - p, pq - q]_\mathcal{S}, \\ (GH) &= \{\, (x,y) \mid px + (q-1)y = pq \,\} = [pq, pq - p, 1 + pq - q]_\mathcal{S}. \end{aligned}$$

e. Montrer que les droites (AC), (EF) et (GH) sont concourantes ou parallèles.

$\surd$ *C'est un résultat du cours (mais introuvable dans le polycopié, mes excuses pour cela) que trois droites $\mathcal{D}_i = [\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2}]_{\mathcal{S}}$ pour $i = 1, 2, 3$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} \beta_{1,0} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,0} & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \\ \beta_{3,0} & \beta_{3,1} & \beta_{3,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Un résultat similaire (vu aux TD) vaut pour trois droites $\mathcal{D}_i = \{\, (x, y)_{\mathcal{R}} \mid a_{1,i}x + a_{2,i}y = b_i \,\}$ avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

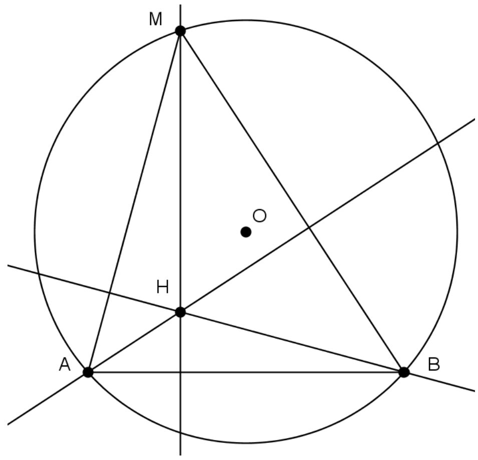
On pourra donc calculer soit

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ p-1 & q & pq \\ p & q-1 & pq \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ p & q-1 & pq \\ p & q-1 & pq \end{vmatrix} = 0,$$

soit

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ pq & 1+pq-p & pq-q \\ pq & pq-p & 1+pq-q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ pq & pq-p & 1+pq-q \end{vmatrix} = 0$$

2. On donne dans le plan euclidien deux points distincts A et B situés sur un cercle Γ de centre O. On cherche le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB, lorsque M décrit le cercle Γ privé de ces points A, B.



a. Soit C le milieu du segment $[AB]$ et G l'isobarycentre de MAB. Écrire G comme barycentre de M et C, et en déduire le rapport de l'homothétie h de centre G vérifiant $h(C) = M$.

$\surd$ *On a $C = \mathrm{bar}(A, B)$ et $G = \mathrm{bar}(M, A, B) = \mathrm{bar}((M, 1), (C, 2))$, donc $\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Le rapport cherché est donc $-\dfrac{\overrightarrow{GC}}{\overrightarrow{GM}} = -2$.*

b. Montrer que les hauteurs d'un triangle MAB sont les images par l'homothétie h des médiatrices de ce triangle. Qu'en déduit-on sur l'image du point O par h ?

$\surd$ *L'image de la médiatrice passant par C est la droite parallèle à celle-ci passant par $h(C) = M$, c'est-à-dire la hauteur issue de M. C'est pareil pour les autres médiatrice, et le point d'intersection O de ces médiatrice est envoyé vers un point d'intersection des hauteurs : c'est l'orthocentre H. On a donné en passant une preuve que ces hauteurs sont concourantes, et on voit $h(O) = H$.*

c. En déduire que lorsque M décrit le cercle Γ, le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est constant égal à $2\overrightarrow{OC}$.

d. Déterminer le lieu du point H lorsque M décrit le cercle Γ privé des points A, B.

e. Déterminer le lieu du symétrique de H par rapport à la droite (AB).

3. Dans cet exercice on se place dans le plan euclidien $\mathcal{P}$. Si Γ est un cercle du plan de centre Ω et de rayon $r > 0$, on appelle puissance du point M par rapport au cercle Γ la valeur $\Gamma(M) \overset{\text{def}}{=} \|\overrightarrow{M\Omega}\|^2 - r^2$.

a. Montrer que si A, A' sont deux points diamétralement opposés de Γ, alors $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \rangle$ pour tout $M \in \mathcal{P}$.

$\checkmark$ *On a* $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{M\Omega} \rangle - \langle \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A} \rangle = \langle \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A} \rangle = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \rangle$.

b. Dans la situation de la question précédente on suppose maintenant $M \neq A$; soit B la projection orthogonale de A' sur (MA). Montrer que $(MA) \cap \Gamma = \{A, B\}$, et que $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$.

$\checkmark$ *Par construction on a* $\overrightarrow{A'B} \perp \overrightarrow{BA}$ *donc* B *se trouve sur le cercle* Γ *de diamètre* $[AA']$. *Si* $B \neq A$ *l'intersection* $(MA) \cap \Gamma$ *contient les deux points* A, B *en ne peut pas contenir plus, d'où l'égalité. Si* $B = A$, *le diamètre* $[AA'] = [BA']$ *est orthogonal à la droite* (MA), *qui est donc tangente à* Γ *en* A *et* $(MA) \cap \Gamma = \{A\} = \{A, B\}$. *En tout cas* $\Gamma(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \rangle = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$ *car* $\overrightarrow{A'B} \perp \overrightarrow{MA}$.

c. Déduire de la question précédente que si $\mathcal{D}$ est une droite telle que $\mathcal{D} \cap \Gamma = \{P, Q\}$, alors $|\Gamma(M)| = d(M, P)d(M, Q)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$, avec $\Gamma(M) < 0$ si et seulement si M est situé entre P et Q, à l'intérieur de l'intervalle $[PQ]$. Faut-il exclure la possibilité $P = Q$?

d. Soit maintenant $\mathcal{D}$ une droite quelconque de $\mathcal{P}$. En considérant $\mathcal{D}$ comme un (sous-)espace euclidien de dimension 1, on y choisit un repère cartésien normé $\mathcal{R} = (O, \vec{v})$, c'est-à-dire on choisit $O \in \mathcal{D}$ et un vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Ainsi tout point $M \in \mathcal{D}$ s'écrit $M = (x)_\mathcal{R} = O + x\vec{v}$ avec $x \in \mathbf{R}$, et on a $d((x)_\mathcal{R}, (y)_\mathcal{R}) = |x - y|$ pour $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels qu'on ait $\Gamma((x)_\mathcal{R}) = (x - a)^2 + b$. Interpréter géométriquement le point $(a)_\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$ où $\Gamma((x)_\mathcal{R})$ est minimal, ainsi que la valeur b.

e. Qu'est-ce qu'on peut dire des points éventuels $(x)_\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$ où $\Gamma((x)_\mathcal{R})$ s'annule ? En supposant que deux tels points $(p)_\mathcal{R}, (q)_\mathcal{R}$ existent (éventuellement confondus), décrire $\Gamma((x)_\mathcal{R})$ pour $x \in \mathbf{R}$ en termes de x, p, q (donc sans utiliser a, b), et retrouver le résultat de la question *c*.

f. Soit maintenant $\mathcal{R}' = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ un repère cartésien orthonormé du plan $\mathcal{P}$, donc tout pour $M \in \mathcal{P}$ s'écrit $M = (x, y)_{\mathcal{R}'} = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Pour quels $a_1, a_2, d \in \mathbf{R}$ a-t-on $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'}) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + d$? Interpréter, en termes de $\mathcal{R}'$ et Γ, le terme constant $c = a_1^2 + a_2^2 + d$ de cette expression (qui apparaît quand on l'écrit sous la forme $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'}) = x^2 + y^2 - 2xa_1 - 2ya_2 + c$).

g. Soit maintenant Δ un autre cercle du plan $\mathcal{P}$, de centre $\Omega' \neq \Omega$ et de rayon $s > 0$. Utiliser l'expression analytique de $\Gamma((x, y)_{\mathcal{R}'})$ de la question précédente pour montrer que la fonction $\mathcal{P} \to \mathbf{R}$ qui envoie $M \mapsto \Gamma(M) - \Delta(M)$ est une application affine et non constante.

h. L'axe radical de Γ et Δ est par définition l'ensemble $\{\, M \in \mathcal{P} \mid \Gamma(M) = \Delta(M) \,\}$. Montrer que cet axe est une droite, et que cette droite est orthogonale à $(\Omega\Omega')$.

i. Décrire l'axe radical de Γ et Δ dans tous les cas où $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$.

j. Montrer que pour trois cercles du plan dont les centres ne son pas alignés, leurs trois axes radicaux sont concourants. Interpréter ce résultat lorsque les cercles se rencontrent mutuellement.

 Fin.