Examen 6L19 : Géométrie mercredi 4 mai 2011
9h00–12h00

Seuls les documents du cours sont admis.

Dans vous réponses vous pouvez utiliser tout résultat du cours (qu'on citera clairement), ainsi que les énoncés des questions précédentes.

Le barème accordera (au moins) un point à chacune des 21 questions.

Les trois parties sont indépendantes.

1. Soit $\mathcal{A}$ un plan affine sur $\mathbf{R}$, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$; on note $(x, y)_\mathcal{R}$ le point $\mathcal{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Pour des coefficients $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, on définit une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ par

$$g((x, y)_\mathcal{R}) = (a + bx + cy, d + ex + fy)_\mathcal{R}$$

a. Montrer que g est une application affine, avec application linéaire associée $\overrightarrow{g} : E \to E$ donnée par

$$\overrightarrow{g}((x, y)_\mathcal{E}) = (bx + cy, ex + fy)_\mathcal{E}.$$

(Ici $(x, y)_\mathcal{E}$ est le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ exprimé dans sa base $\mathcal{E} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.)

b. Montrer que toute application affine $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ peut être donnée sous cette forme, pour certains $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. [Indication : préciser des propriétés qui déterminent une application affine complètement, et montrer qu'on peut les réaliser par un choix de coefficients convenable.]

c. Soit $A = (11, 3)_\mathcal{R}$, et $B = (6, 8)_\mathcal{R}$. On définit une application affine $g_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui a $M \in \mathcal{A}$ associe $\mathrm{bar}\big((A, 1), (B, 4), (M, 2)\big) + (4, 3)_\mathcal{E}$ (la notation "bar" désigne un barycentre pondéré). Décrire g_1 sous la forme de la question a (c'est-à-dire expliciter les 6 coefficients $a, \ldots, f$).

d. Trouver l'ensemble des points fixes de g_1, et donner ensuite une description plus simple de cette application que celle donnée dans la question précédente.

e. Soit C le point tel que $A, B, C, \mathcal{O}$ forment un parallélogramme (avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{O}C}$), et soit $g_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'application affine telle que $g_2(A) = A$, $g_2(B) = B$, et $g_2(\mathcal{O}) = C$. Décrire g_2 sous la forme de la question a.

f. Montrer que g_2 est bijectif, et trouver l'ensemble de ses points fixes.

g. Montrer que pour tout point M non fixé par g_2, le vecteur $\overrightarrow{Mg_2(M)}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$ (autrement dit, il appartient à la direction de la droite $\mathcal{D}_{A,B}$).

h. Soit $G = \mathrm{bar}(A, B, \mathcal{O})$, l'isobarycentre de ces trois points. Calculer les coordonnées de G dans le repère $\mathcal{R}$, et de son image $G' = g_2(G)$. Est-ce que G' se trouve sur la droite $\mathcal{D}_{\mathcal{O},B}$?

i. Calculer l'application composée $g_3 = g_2 \circ g_1$ sous la forme de la question a. Trouver l'ensemble de ses points fixes et décrire la nature de cette application.

2. Dans cette partie $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien, dans lequel on désigne par $d(X, Y)$ la distance entre les points X, Y. Soient $A, B \in \mathcal{P}$ deux points distincts, et λ un nombre réel strictement positif. On étudiera l'ensemble

$$L = \{\, P \in \mathcal{P} \mid d(P, A) = \lambda.d(P, B) \,\}.$$

a. Décrire L lorsque $\lambda = 1$.

On supposera désormais $\lambda \neq 1$.

b. Donner une équation un termes du produit scalaire de vecteurs, qui soit équivalente à l'équation $d(P, A) = \lambda.d(P, B)$ qui caractérise les points $P \in L$. Montrer que cette équation est satisfaite si et seulement si les vecteurs $\lambda\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA}$ et $\lambda\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ sont perpendiculaires.

c. Décrire deux points $G_1, G_2 \in \mathcal{P}$, obtenus comme des barycentres de A et B affectés de poids convenables, tels que pour tout $P \in \mathcal{A}$ on ait $\lambda\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \mu_1\overrightarrow{PG_1}$ et $\lambda\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \mu_2\overrightarrow{PG_2}$, où μ_1, μ_2 sont des scalaires qui ne dépendent que de λ (et qu'on spécifiera).

d. Montrer que L est égal au cercle dont le segment $[G_1, G_2]$ est un diamètre.

 continué au verso

3. Soit A, B, C un triangle du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

a. Donner une condition qui caractérise le centre Ω du cercle circonscrit du triangle A, B, C, c'est-à-dire un cercle qui passe par A, B et C.

b. Décrire comment on peut construire Ω. Cela montrera en particulier qu'un cercle circonscrit existe toujours et est unique. On désignera ce cercle par Γ.

c. Montrer que les milieux $\mathrm{bar}(A, B)$ et $\mathrm{bar}(A, C)$ des deux côtés du triangle avoisinant A sont situés sur le cercle de diamètre $[A, \Omega]$.

d. Soit A' le point tel que A, B, A', C forme un parallélogramme. Montrer qu'il existe une isométrie unique $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, qu'on décrira explicitement, qui envoie A, B, C respectivement vers A', C, B.

e. On construit les points B' et C' de façon similaire (donc B, C, B', A et C, A, C', B sont des parallélogrammes). Montrer que le côté $\mathcal{D}_{B,C}$ du triangle A, B, C est parallèle à $\mathcal{D}_{B',C'}$. On a aussi $\mathcal{D}_{C,A} \parallel \mathcal{D}_{C',A'}$ et $\mathcal{D}_{A,B} \parallel \mathcal{D}_{A',B'}$ (inutile de refaire la démonstration pour ces cas).

f. On suppose que le centre H du cercle circonscrit de ce nouveau triangle A', B', C' est distinct des sommets A, B, C du triangle de départ. Montrer que $\mathcal{D}_{A,H} \perp \mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{B,H} \perp \mathcal{D}_{C,A}$, et $\mathcal{D}_{C,H} \perp \mathcal{D}_{A,B}$. Autrement dit, H est l'orthocentre du triangle A, B, C.

g. Soit σ la réflexion en la droite $\mathcal{D}_{B,C}$, et $I = \sigma(H)$. Montrer que $I \in \Gamma$, c'est-à-dire que les points A, B, I, C sont cocycliques. [Indication : on pourra déduire de la question précédente l'égalité des angles de droites $\widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{B,H}} = \widehat{\mathcal{D}_{B,A}\mathcal{D}_{A,C}}$.]

h. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant d'abord l'énonce de la question *c* au triangle A', B', C' pour prouver que A', B, H, C sont cocycliques, et en comparant ensuite l'effet de ρ et de σ sur le cercle passant par ces points.