Corrigé Examen 6L19 : Géométrie mercredi 4 mai 2011
9h00–12h00

1. Soit $\mathcal{A}$ un plan affine sur $\mathbf{R}$, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$; on note $(x, y)_{\mathcal{R}}$ le point $\mathcal{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Pour des coefficients $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, on définit une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ par

$$g((x, y)_{\mathcal{R}}) = (a + bx + cy, d + ex + fy)_{\mathcal{R}}$$

a. Montrer que g est une application affine, avec application linéaire associée $\vec{g} : E \to E$ donnée par

$$\vec{g}((x, y)_{\mathcal{E}}) = (bx + cy, ex + fy)_{\mathcal{E}}.$$

(Ici $(x, y)_{\mathcal{E}}$ est le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ exprimé dans sa base $\mathcal{E} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\vec{\mathcal{A}}$.)

$\surd$ *L'application $\vec{g} : E \to E$ est en effet linéaire, car c'est celle de matrice $\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ e & f \end{smallmatrix}\right)$ dans la base $\mathcal{E}$. Il s'agit alors de montrer que pour $A, B \in \mathcal{A}$ on ait $\overrightarrow{g(A)g(B)} = \vec{g}(\overrightarrow{AB})$. Or si $A = (x, y)_{\mathcal{R}}$ et $B = (x', y')_{\mathcal{R}}$ on a $\overrightarrow{AB} = (x' - x, y' - y)_{\mathcal{R}}$, et*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g(A)g(B)} &= \overrightarrow{(a + bx + cy, d + ex + fy)_{\mathcal{R}}\ (a + bx' + cy', d + ex' + fy')_{\mathcal{R}}} \\ &= (b(x' - x) + c(y' - y), e(x' - x) + f(y' - y))_{\mathcal{E}} = \vec{g}(\overrightarrow{AB}).\end{aligned}$$

b. Montrer que toute application affine $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ peut être donnée sous cette forme, pour certains $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. [Indication : préciser des propriétés qui déterminent une application affine complètement, et montrer qu'on peut les réaliser par un choix de coefficients convenable.]

$\surd$ *Une application affine est déterminée par la donnée conjointe de l'application linéaire associée et l'image d'un point choisi. Or on sait que les applications linéaires sont déterminées par leur matrice sur une base vectorielle. Soit M la matrice dans la base $\mathcal{E}$ de application linéaire associée à l'application affine donnée g_0, et $P = g_0(\mathcal{O})$. Alors on peut prendre $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ tels que $\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ e & f \end{smallmatrix}\right) = M$ et $(a, b)_{\mathcal{R}} = P$; alors g et g_0 ont la même application linéaire associée, ainsi que $g(\mathcal{O}) = P = g_0(\mathcal{O})$, donc $g = g_0$. On aurait aussi pu dire que g_0 est déterminé par ces images de trois points affinement indépendants, et adapter les coefficients aux images de $\mathcal{O}, \mathcal{O} + \vec{\imath}, \mathcal{O} + \vec{\jmath}$.*

c. Soit $A = (11, 3)_{\mathcal{R}}$, et $B = (6, 8)_{\mathcal{R}}$. On définit une application affine $g_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui a $M \in \mathcal{A}$ associe $\operatorname{bar}\bigl((A, 1), (B, 4), (M, 2)\bigr) + (4, 3)_{\mathcal{E}}$ (la notation "bar" désigne un barycentre pondéré). Décrire g_1 sous la forme de la question a (c'est-à-dire expliciter les 6 coefficients $a, \ldots, f$).

$\surd$ *On calcule $g_1(\mathcal{O}) = (9, 8)_{\mathcal{R}}$, $g_1((1, 0)_{\mathcal{R}}) = (9 + \frac{2}{7}, 8)_{\mathcal{R}}$, $g_1((0, 1)_{\mathcal{R}}) = (9, 8 + \frac{2}{7})_{\mathcal{R}}$ donc $a = 9$, $d = 8$, $b = f = \frac{2}{7}$ et $c = e = 0$.*

d. Trouver l'ensemble des points fixes de g_1, et donner ensuite une description plus simple de cette application que celle donnée dans la question précédente.

$\surd$ *Le système d'équations $x = 9 + \frac{2}{7}x, y = 8 + \frac{2}{7}y$ a pour unique solution $x = \frac{63}{5}$ et $y = \frac{56}{5}$, donc $(\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_{\mathcal{R}}$ est l'unique point fixe de g_1. Comme l'application linéaire associée $\vec{g_1}$ est une homothétie de facteur $\frac{2}{7}$, on trouve que g_1 est une homothétie de centre $(\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_{\mathcal{R}}$ et de facteur $\frac{2}{7}$.*

e. Soit C le point tel que $A, B, C, \mathcal{O}$ forment un parallélogramme (avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{O}C}$), et soit $g_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'application affine telle que $g_2(A) = A$, $g_2(B) = B$, et $g_2(\mathcal{O}) = C$. Décrire g_2 sous la forme de la question a.

$\surd$ *On a $\overrightarrow{AB} = (-5, 5)_{\mathcal{E}}$, et $C = \mathcal{O} + \overrightarrow{AB} = (-5, 5)_{\mathcal{R}}$. Les coefficients de g_2 sont donc déterminés par les trois équations $(-5, 5)_{\mathcal{R}} = (a, d)_{\mathcal{R}}$, $(11, 3)_{\mathcal{R}} = (a + 11b + 3c, d + 11e + 3f)_{\mathcal{R}}$ et $(6, 8) = (a + 6b + 8c, d + 6e + 8f)_{\mathcal{R}}$, qui ont pour solution $a = -5$, $d = 5$, $b = \frac{19}{14}$, $c = \frac{5}{14}$, $e = -\frac{5}{14}$, $f = \frac{9}{14}$. Pour trouver cette solution de façon pas trop fastidieuse, on pourra remarquer d'abord que la première équation donne a, d, et que les autres paramètres déterminent $\vec{g_2}$ qui vérifie $\vec{g_2}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, et $\vec{g_2}(\overrightarrow{\mathcal{O}P}) = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} - \overrightarrow{AB}$ pour tout $P \in \mathcal{D}_{A,B}$, donc $(\vec{g_2} - \mathrm{id}_E)((-1, 1)_{\mathcal{E}}) = \vec{0}$ et $(\vec{g_2} - \mathrm{id}_E)((7, 7)_{\mathcal{E}}) = -\overrightarrow{AB} = (5, -5)_{\mathcal{E}}$, d'où $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{g_2} - \mathrm{id}_E) = \frac{5}{14}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ e & f \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 19/14 & 5/14 \\ -5/14 & 9/14 \end{smallmatrix}\right)$.*

f. Montrer que g_2 est bijectif, et trouver l'ensemble de ses points fixes.

$\surd$ *Comme les images des points $\mathcal{O}$, A, B sont affinement indépendants (c'est-à-dire non alignés) g_2 est bijectif. Parmi ses points fixes figurent A et B, mais pas tout le plan (car $\mathcal{O}$ n'est pas fixe), et comme l'ensemble de ses points fixes (n'étant pas vide) est un sous-espace affine, il s'agit de la droite $\mathcal{D}_{A,B}$, qui se décrit aussi comme $\{\, (x, y)_{\mathcal{R}} \mid x + y = 14 \,\}$.*

g. Montrer que pour tout point M non fixé par g_2, le vecteur $\overrightarrow{Mg_2(M)}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$ (autrement dit, il appartient à la direction de la droite $\mathcal{D}_{A,B}$).

√ *Pour $M = (x,y)_\mathcal{R}$, on a $\overrightarrow{Mg_2(M)} = (-5 + \frac{5}{14}(x+y), 5 - \frac{5}{14}(x+y))_\mathcal{E} = (5 - \frac{5}{14}(x+y))(-1,1)_\mathcal{E}$, ce qui est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB} = (-5,5)_\mathcal{E}$. On aurait pu également raisonner que $M \mapsto \overrightarrow{Mg_2(M)}$ est une application affine $\mathcal{A} \to \vec{\mathcal{A}}$, qui prend sur les points du repère affine $\mathcal{O}, A, B$ respectivement des valeurs $\overrightarrow{\mathcal{O}C} = \overrightarrow{AB}, \vec{0}, \vec{0}$, d'où l'image de cette application est contenue dans le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB}, \vec{0}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ engendré pas ces images (attention : on considère alors $\vec{\mathcal{A}}$ comme espace affine, et la seule raison qu'on trouve un sous-espace vectoriel comme résultat est qu'il contient $\vec{0}$).*

h. Soit $G = \mathrm{bar}(A, B, \mathcal{O})$, l'isobarycentre de ces trois points. Calculer les coordonnées de G dans le repère $\mathcal{R}$, et de son image $G' = g_2(G)$. Est-ce que G' se trouve sur la droite $\mathcal{D}_{\mathcal{O},B}$?

√ *On a $G = (\frac{17}{3}, \frac{11}{3})_\mathcal{R}$ et $G' = (-5+\frac{19}{14}\times\frac{17}{3}+\frac{5}{14}\times\frac{11}{3}, 5-\frac{5}{14}\times\frac{17}{3}+\frac{9}{14}\times\frac{11}{3}) = (\frac{168}{42}, \frac{224}{42})_\mathcal{R} = (4, \frac{16}{3})_\mathcal{R}$. Ce point se calcule plus facilement comme l'isobarycentre des images respectives A, B, C de $A, B, \mathcal{O}$. Pour vérifier si G' se trouve sur $\mathcal{D}_{\mathcal{O},B}$ on pourra calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & \frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

donc en effet $G' \in \mathcal{D}_{\mathcal{O},B}$. Là encore il est plus simple de raisonner géométriquement : $G' = \mathrm{bar}(A,B,C) = \mathrm{bar}((B,1), (\mathrm{bar}(A,C), 2) = \mathrm{bar}((B,1), (\mathrm{bar}(\mathcal{O},B), 2) = \mathrm{bar}((B,2), (\mathcal{O},1)) \in \mathcal{D}_{\mathcal{O},B}$.

i. Calculer l'application composée $g_3 = g_2 \circ g_1$ sous la forme de la question *a*. Trouver l'ensemble de ses points fixes et décrire la nature de cette application.

√ *La composée $g_2 \circ g_1$ peut être calculée par multiplication matricielle*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & \frac{19}{14} & \frac{5}{14} \\ 5 & -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & \frac{2}{7} & 0 \\ 8 & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{141}{14} & \frac{19}{49} & \frac{5}{49} \\ \frac{97}{14} & -\frac{5}{49} & \frac{9}{49} \end{pmatrix}$$

donc $g_3((x,y)_\mathcal{R}) = (\frac{141}{14} + \frac{19}{49}x + \frac{5}{49}y, \frac{97}{14} - \frac{5}{49}x + \frac{9}{49}y)_\mathcal{R}$ (le calcul par substitution est équivalent). Pour les points fixes un calcul direct utilisant cette formule n'est pas attirant (désolé), mais on peut se servir des questions d et g : g_1 est une homothétie, et g_2 déplace les points dans la direction de $\mathcal{D}_{A,B}$, donc pour que P soit fixé par la composition, il faut que g_1 le déplace dans le sens opposé, et donc que $P \in (\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_\mathcal{R} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ (ici $(\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_\mathcal{R}$ est le centre de g_1). En posant $P = (\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_\mathcal{R} + \lambda(-1,1)_\mathcal{E}$ on trouve d'abord $g_1(P) = (\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_\mathcal{R} + \frac{2}{7}\lambda(-1,1)_\mathcal{E}$, et en posant $M = g_1(P)$ on veut que $\overrightarrow{Mg_2(M)} = \overrightarrow{MP}$ pour que $g_3(P) = g_2(M) = P$, donc d'après la question g : $(5 - \frac{5}{14} \times \frac{63+56}{5})(-1,1)_\mathcal{E} = \frac{5}{7}\lambda(-1,1)_\mathcal{E}$ ce qui mène à l'équation $-\frac{7}{2} = \frac{5}{7}\lambda$ qui a pour solution $\lambda = -\frac{49}{10}$. L'unique point fixe de g_3 est donc $(\frac{63}{5}, \frac{56}{5})_\mathcal{R} - \frac{49}{10}(-1,1)_\mathcal{E} = (\frac{35}{2}, \frac{63}{10})_\mathcal{R}$ (on pourra le vérifier avec la description analytique de g_3). On a $\vec{g_3} = \vec{g_2} \circ \vec{g_1} = \frac{2}{7}\vec{g_2}$ (car $\vec{g_1} = \frac{2}{7}\,\mathrm{id}_E$). Or $\vec{g_2} - \mathrm{id}_E$ a $\frac{5}{14}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ pour matrice dans $\mathcal{E}$, qui est nilpotente, donc $\vec{g_2}$ n'a que des valeurs propres 1, et $\vec{g_3}$ n'a que des valeurs propres $\frac{2}{7}$. Comme $\vec{g_2} \neq \mathrm{id}_E$, l'espace propre pour 1 de $\vec{g_2}$ (qui est aussi l'espace propre pour $\frac{2}{7}$ de $\vec{g_3}$) est de dimension 1, et égal à $\mathrm{Vect}((1,-1)_\mathcal{E})$. En résumé, g_3 est la composée d'une homothétie, de centre $(\frac{35}{2}, \frac{63}{10})_\mathcal{R}$ et de facteur $\frac{2}{7}$, et d'une transvection fixant la droite parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$ passant par ce point.

2. Dans cette partie $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien, dans lequel on désigne par $d(X,Y)$ la distance entre les points X, Y. Soient $A, B \in \mathcal{P}$ deux points distincts, et λ un nombre réel strictement positif. On étudiera l'ensemble

$$L = \{\, P \in \mathcal{P} \mid d(P,A) = \lambda.d(P,B) \,\}.$$

a. Décrire L lorsque $\lambda = 1$.

√ *Il s'agit de la droite médiatrice de A et B.*

On supposera désormais $\lambda \neq 1$.

b. Donner une équation un termes du produit scalaire de vecteurs, qui soit équivalente à l'équation $d(P,A) = \lambda.d(P,B)$ qui caractérise les points $P \in L$. Montrer que cette équation est satisfaite si et seulement si les vecteurs $\lambda\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA}$ et $\lambda\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ sont perpendiculaires.

$\surd$ *Comme $d(P,A)$ et $\lambda.d(P,B)$ sont toujours positifs, l'équation $d(P,A) = \lambda.d(P,B)$ est équivalente à celle obtenue en prenant le carré de ces deux membres, qui s'écrit $\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA}\rangle = \lambda^2\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PB}\rangle$, ou encore $\lambda^2\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PB}\rangle - \langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA}\rangle = 0$ ou $\langle\lambda\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA},\lambda\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\rangle = 0$; cette dernière forme est clairement satisfaite si et seulement si $\lambda\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}$ et $\lambda\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$ sont perpendiculaires.*

c. Décrire deux points $G_1, G_2 \in \mathcal{P}$, obtenus comme des barycentres de A et B affectés de poids convenables, tels que pour tout $P \in \mathcal{A}$ on ait $\lambda\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \mu_1\overrightarrow{PG_1}$ et $\lambda\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \mu_2\overrightarrow{PG_2}$, où μ_1, μ_2 sont des scalaires qui ne dépendent que de λ (et qu'on spécifiera).

$\surd$ *Par le calcul basé dans P d'un barycentre pondéré, on a $\operatorname{bar}((A,1),(B,\lambda)) = P + \frac{1}{\lambda+1}(\lambda\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA})$. Par conséquent si on pose $G_1 = \operatorname{bar}((A,1),(B,\lambda))$, on a $\lambda\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA} = (\lambda+1)\overrightarrow{PG_1}$. De façon similaire pour $G_2 = \operatorname{bar}((A,-1),(B,\lambda))$, on a $\lambda\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA} = (\lambda-1)\overrightarrow{PG_2}$ (donc $\mu_1,\mu_2 = \lambda\pm 1$).*

d. Montrer que L est égal au cercle dont le segment $[G_1, G_2]$ est un diamètre.

$\surd$ *D'après les questions b,d on a $P \in L$ si et seulement si*

$$0 = \langle(\lambda+1)\overrightarrow{PG_1},(\lambda-1)\overrightarrow{PG_2}\rangle = (\lambda^2-1)\langle\overrightarrow{PG_1},\overrightarrow{PG_2}\rangle,$$

c'est-à-dire (car $\lambda^2 \neq 1$)si $\overrightarrow{PG_1} \perp \overrightarrow{PG_2}$. L'ensemble de tels points forme le cercle dont le segment $[G_1, G_2]$ est un diamètre (équation (14) du cours).

3. Soit A, B, C un triangle du plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

a. Donner une condition qui caractérise le centre Ω du cercle circonscrit du triangle A, B, C, c'est-à-dire un cercle qui passe par A, B et C.

$\surd$ *Le point Ω est à distance égale des trois points: $d(\Omega,A) = d(\Omega,B) = d(\Omega,C)$.*

b. Décrire comment on peut construire Ω. Cela montrera en particulier qu'un cercle circonscrit existe toujours et est unique. On désignera ce cercle par Γ.

$\surd$ *On peut trouver Ω comme le point d'intersection de deux des trois médiatrices des paires de points parmi A, B, C (les trois médiatrices étant concourantes). Comme chacune des médiatrices est perpendiculaire au côté correspondant du triangle, et ces côtés sont deux à deux non parallèles, deux médiatrices ne peuvent pas être parallèles, et se coupent donc en un point.*

c. Montrer que les milieux $\operatorname{bar}(A, B)$ et $\operatorname{bar}(A, C)$ des deux côtés du triangle avoisinant A sont situés sur le cercle de diamètre $[A, \Omega]$.

$\surd$ *La médiatrice de A, B est perpendiculaire à $\mathcal{D}_{A,B}$, donc le triangle $A, \operatorname{bar}(A,B), \Omega$ est rectangle en $\operatorname{bar}(A,B)$, quel point se trouve donc sur le cercle dont l'hypoténuse $[A,\Omega]$ du triangle est diamètre. Le point $\operatorname{bar}(A,C)$ se trouve sur ce cercle pour le même raison (avec C à la place de B).*

d. Soit A' le point tel que A, B, A', C forme un parallélogramme. Montrer qu'il existe une isométrie unique $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, qu'on décrira explicitement, qui envoie A, B, C respectivement vers A', C, B.

$\surd$ *Dans ce parallélogramme on a $\operatorname{bar}(A,A') = \operatorname{bar}(B,C)$, donc la symétrie centrale par rapport à ce point échange $A \leftrightarrow A'$ et $B \leftrightarrow C$. Comme une symétrie centrale est une isométrie, on peut la prendre pour ρ, et est c'est l'unique choix possible, car une isométrie (et plus généralement une application affine) est entièrement déterminée pas ses images d'un repère affine comme A, B, C.*

e. On construit les points B' et C' de façon similaire (donc B, C, B', A et C, A, C', B sont des parallélogrammes). Montrer que le côté $\mathcal{D}_{B,C}$ du triangle A, B, C est parallèle à $\mathcal{D}_{B',C'}$. On a aussi $\mathcal{D}_{C,A} \parallel \mathcal{D}_{C',A'}$ et $\mathcal{D}_{A,B} \parallel \mathcal{D}_{A',B'}$ (inutile de refaire la démonstration pour ces cas).

$\surd$ *On a $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'A}$ par hypothèse, donc $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{BC}$, et $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.*

f. On suppose que le centre H du cercle circonscrit de ce nouveau triangle A', B', C' est distinct des sommets A, B, C du triangle de départ. Montrer que $\mathcal{D}_{A,H} \perp \mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{B,H} \perp \mathcal{D}_{C,A}$, et $\mathcal{D}_{C,H} \perp \mathcal{D}_{A,B}$. Autrement dit, H est l'orthocentre du triangle A, B, C.

$\surd$ *On a $A = \operatorname{bar}(B', C')$ par la réponse à e, donc par la construction de la question b, $\mathcal{D}_{A,H}$ est la médiatrice de B',C', et $\mathcal{D}_{A,H} \perp \mathcal{D}_{B',C'} \parallel \mathcal{D}_{B,C}$. De même pour $\mathcal{D}_{B,H} \perp \mathcal{D}_{C,A}$, et $\mathcal{D}_{C,H} \perp \mathcal{D}_{A,B}$.*

g. Soit σ la réflexion en la droite $\mathcal{D}_{B,C}$, et $I = \sigma(H)$. Montrer que $I \in \Gamma$, c'est-à-dire que les points A, B, I, C sont cocycliques. [Indication : on pourra déduire de la question précédente l'égalité des angles de droites $\widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{B,H}} = \widehat{\mathcal{D}_{B,A}\mathcal{D}_{A,C}}$.]

$\surd$ *Comme une réflexion inverse les angles orientés on a* $\widehat{\mathcal{D}_{B,I}\mathcal{D}_{C,I}} = \widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{B,H}}$, *et* $\widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{B,H}} = \widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{A,B}} + \widehat{\mathcal{D}_{A,B}\mathcal{D}_{A,C}} + \widehat{\mathcal{D}_{A,C}\mathcal{D}_{B,H}} = \widehat{\mathcal{D}_{B,A}\mathcal{D}_{C,A}} + \hat{\varpi} = \widehat{\mathcal{D}_{B,A}\mathcal{D}_{C,A}}$, *car les angles* $\widehat{\mathcal{D}_{C,H}\mathcal{D}_{A,B}}$ *et* $\widehat{\mathcal{D}_{A,C}\mathcal{D}_{B,H}}$ *sont droits d'après la question précédente, et l'angle plat* $\hat{\varpi}$ *de droites est équivalent à l'angle nul de droites. La cocyclicité de* A, B, I, C *découle de* $\widehat{\mathcal{D}_{B,I}\mathcal{D}_{C,I}} = \widehat{\mathcal{D}_{B,A}\mathcal{D}_{C,A}}$

h. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant d'abord l'énonce de la question *c* au triangle A', B', C' pour prouver que A', B, H, C sont cocycliques, et en comparant ensuite l'effet de ρ et de σ sur le cercle passant par ces points.

$\surd$ *Comme* H *est le centre du cercle circonscrit au triangle* A', B', C', *les points* $B = \mathrm{bar}(A', C')$, *et* $C = \mathrm{bar}(A', B')$ *sont sur le cercle de diamètre* $[A', H]$, *d'après la question c, et* A', B, H, C *sont cocycliques, disons sur un cercle* Δ. *La symétrie* ρ *transforme* Δ, *qui est circonscrit à* A', B, C, *en le cercle circonscrit à* A, C, B, *c'est-à-dire en* Γ. *La réflexion* σ *transforme ce même cercle* Δ, *qui est aussi circonscrit à* B, H, C, *en le cercle circonscrit à* B, I, C. *Soit* r *le rayon de* Δ. *Il n'y a pas plus que deux cercles de rayon* r *passant par* B *et* C *(leurs centres sont les points d'intersection des cercles de rayon* r *et des centres respectifs* B *et* C*) dont* Δ *est un, et ses images par* ρ *et* σ *en sont aussi. Or ces derniers sont tous deux distincts de* Δ, *sauf dans le cas où qu'un seul tel cercle existe, c'est-à-dire où* $[B, C]$ *est diamètre de* Δ. *Par conséquent* $\rho(\Delta) = \sigma(\Delta)$ *dans tous les cas, et* A, B, I, C *sont cocycliques sur ce cercle.*

Fin.