Contrôle continu 6L19 : Géométrie jeudi 10 mars 2011
10h00–12h00

Seuls les documents du cours sont admis. Tous les résultats du cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement énoncés. Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres.

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

1. On se place dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Soient $\mathcal{D}_1$, D_2 les deux droites affines définies par les systèmes d'équations dans $\mathcal{R}$

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases} .$$

Trouver toutes les droites Δ de $\mathcal{A}$ (faiblement) parallèles au plan $O + \mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ et rencontrant chacune des trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, et $O + \mathrm{Vect}(\vec{k})$.

2. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 3, et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans non parallèles, $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites qui se coupent en un point. On suppose que $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ coupent $\mathcal{P}$ dans deux points distincts notés A_1, A_2, et qu'elles coupent également $\mathcal{P}'$ en deux points distincts notés A'_1, A'_2.

a. Vérifier que Δ est une droite de $\mathcal{A}$.

b. Montrer que, ou bien les droites $\mathcal{D}_{A_1,A_2}$ et $\mathcal{D}_{A'_1,A'_2}$ sont parallèles, ou bien elles se coupent en un point de Δ que l'on précisera. *(On pourra distinguer deux cas : le cas où Δ est parallèle au plan Π défini par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et le cas où Δ est non parallèle à Π.)*

3. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine, et $A, B, C \in \mathcal{P}$ trois points non alignés. Ces points forment ainsi un repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$ du plan $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ qui coupe les droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{A,B}$ en un seul point chacune, notés respectivement P, Q et R.

a. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tels que $P = (0, \alpha, 1-\alpha)_{\mathcal{S}}$, $Q = (1-\beta, 0, \beta)_{\mathcal{S}}$ et $R = (\gamma, 1-\gamma, 0)_{\mathcal{S}}$ soient les coordonnées barycentriques de P, Q et R par rapport à $\mathcal{S}$ respectivement.

b. Donner une condition portant sur α, β et γ qui exprime le fait que P, Q, et R sont alignés.

c. Donner les coordonnées barycentriques des isobarycentres $\mathrm{bar}(A, P)$, $\mathrm{bar}(B, Q)$ et $\mathrm{bar}(C, R)$, et montrer que ces isobarycentres sont alignés.

4. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine, A, B, C, D quatre points de $\mathcal{A}$. On appelle $P = \mathrm{bar}(A, B)$, $Q = \mathrm{bar}(B, C)$, $R = \mathrm{bar}(C, D)$, et $S = \mathrm{bar}(D, A)$ les milieux respectifs de (A, B), (B, C), (C, D) et (D, A).

a. Établir une relation entre les isobarycentres $\mathrm{bar}(A, B, C, D)$ et $\mathrm{bar}(P, Q, R, S)$.

b. Soit $M \in \mathcal{A}$ un point, et soient P', Q', R', S' les symétriques de M par rapport a P, Q, R, S, respectivement. Exprimer l'isobarycentre $\mathrm{bar}(P, Q, R, S)$ de P, Q, R, S comme un barycentre pondéré des points M, P', Q', R', S'.

c. Montrer que $\mathrm{bar}(A, B, C, D)$ est le milieu des points M et $\mathrm{bar}(P', Q', R', S')$.

Fin.