Corrigé Contrôle continu 6L19 : Géométrie jeudi 10 mars 2011
10h00–12h00

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

1. On se place dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension trois muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}))$. Soient $\mathcal{D}_1$, D_2 les deux droites affines définies par les systèmes d'équations dans $\mathcal{R}$

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 1 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} y = 3x \\ z = 1 \end{cases}.$$

Trouver toutes les droites Δ de $\mathcal{A}$ (faiblement) parallèles au plan $O+\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et rencontrant chacune des trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, et $O + \mathrm{Vect}(\vec{k})$.

$\surd$ *La droite $\mathcal{D}_2$ est contenu dans le plan d'équation $z = 1$ qui est parallèle au plan $O+\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, donc pour rencontrer $\mathcal{D}_2$, Δ doit aussi être contenu dans ce plan. Or $\mathcal{D}_1$ et $O+\mathrm{Vect}(\vec{k})$ coupent chacun ce plan en un point, pour $\mathcal{D}_1$ c'est $(0,1,1)_{\mathcal{R}}$, obtenu en substituant $z = 1$ dans les équations, et pour $O + \mathrm{Vect}(\vec{k})$ c'est $(0,0,1)_{\mathcal{R}}$. La droite Δ doit donc être celle qui passe par ces points, à savoir $(0,0,1)_{\mathcal{R}} + \mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$. Or "le hasard" veut que $(0,0,1)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D}_2$ donc cette droite rencontre bien les trois droites indiquées.*

2. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 3, et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans non parallèles, $\Delta = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites qui se coupent en un point. On suppose que $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ coupent $\mathcal{P}$ dans deux points distincts notés A_1, A_2, et qu'elles coupent également $\mathcal{P}'$ en deux points distincts notés A'_1, A'_2.

a. Vérifier que Δ est une droite de $\mathcal{A}$.

$\surd$ *Comme $\dim(\mathcal{A}) = 3$ des plans sont des hyperplans, et un hyperplan $\mathcal{P}$ coupe tout sous-espace $\mathcal{V}$ qui n'est pas faiblement parallèle à $\mathcal{P}$ en un hyperplan de $\mathcal{V}$ (proposition 1.2.10). En appliquant cela pour $\mathcal{V} = \mathcal{P}'$, on trouve que Δ est un hyperplan du plan $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire une droite.*

b. Montrer que, ou bien les droites $\mathcal{D}_{A_1,A_2}$ et $\mathcal{D}_{A'_1,A'_2}$ sont parallèles, ou bien elles se coupent en un point de Δ que l'on précisera. *(On pourra distinguer deux cas : le cas où Δ est parallèle au plan Π défini par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et le cas où Δ est non parallèle à Π.)*

$\surd$ *Si P est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on a $\Pi = P + (\overrightarrow{\mathcal{D}_1} + \overrightarrow{\mathcal{D}_2})$, qui est bien un plan car $\overrightarrow{\mathcal{D}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}_2}$ sont deux droites vectorielles distinctes. Ce plan coupe chacun des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ en une droite, pour la même raison que dans la question a (il n'est pas parallèle à l'un de ces plans, car cela impliquerait (à cause de A_1, A'_1) qu'il est confondu avec l'un d'eux, ce qui n'est pas le cas car ni $\mathcal{P}$ ni $\mathcal{P}'$ contient $\mathcal{D}_1 \subseteq \Pi$), et il est clair que ces droites sont $\mathcal{D}_{A_1,A_2}$ et $\mathcal{D}_{A'_1,A'_2}$. En tout cas $\mathcal{D}_{A_1,A_2} \cap \mathcal{D}_{A'_1,A'_2} = \Pi \cap \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Pi \cap \Delta$. Si cette intersection est soit vide soit égale à Δ, alors les deux droites $\mathcal{D}_{A_1,A_2}$, $\mathcal{D}_{A'_1,A'_2}$ du plan Π sont parallèles (et éventuellement confondues), et sinon c'est un point de Δ, qui est dans ce cas son unique point d'intersection avec Π.*

3. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine, et $A, B, C \in \mathcal{P}$ trois points non alignés. Ces points forment ainsi un repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$ du plan $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ qui coupe les droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{A,B}$ en un seul point chacune, notés respectivement P, Q et R.

a. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tels que $P = (0, \alpha, 1-\alpha)_{\mathcal{S}}$, $Q = (1-\beta, 0, \beta)_{\mathcal{S}}$ et $R = (\gamma, 1-\gamma, 0)_{\mathcal{S}}$ soient les coordonnées barycentriques de P, Q et R par rapport à $\mathcal{S}$ respectivement.

$\surd$ *Comme le point P est sur la droite $\mathcal{D}_{B,C}$, sa première coordonnée barycentrique sera 0. Or la somme des coordonnées barycentriques est 1, donc si on appelle sa seconde coordonnée α, la dernière sera alors $1 - \alpha$. On peut procéder de façon similaire pour Q et R, où la seconde respectivement troisième coordonnée barycentrique sera nulle.*

b. Donner une condition portant sur α, β et γ qui exprime le fait que P, Q, et R sont alignés.

$\surd$ *On a vu que cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant des coordonnées barycentriques, c'est-à-dire*

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0, \iff \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 0.$$

c. Donner les coordonnées barycentriques des isobarycentres $\mathrm{bar}(A,P)$, $\mathrm{bar}(B,Q)$ et $\mathrm{bar}(C,R)$, et montrer que ces isobarycentres sont alignés.

$\surd$ *En coordonnés barycentriques, l'isobarycentre de deux points est calculé en prenant la moyenne dans chaque coordonnée (cela, en une formule similaire pour les barycentres généraux, ce montre facilement en utilisant la formule dite d'associativité des barycentres), autrement dit la moyenne vectorielle dans* K^{n+1}*. Ainsi on trouve* $\mathrm{bar}(A,P) = \frac{1}{2}(1, \alpha, 1-\alpha)$, $\mathrm{bar}(B,Q) = \frac{1}{2}(1-\beta, 1, \beta)$, *et* $\mathrm{bar}(C,R) = \frac{1}{2}(\gamma, 1-\gamma, 1)$. *En formant un déterminant (et mettant en facteur les* $\frac{1}{2}$*), on calcule*

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(1+\alpha\beta\gamma+(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-\alpha(1-\beta)-\beta(1-\gamma)-\gamma(1-\alpha))$$
$$= \frac{1}{4}(1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \frac{1}{4}((1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\alpha\beta\gamma),$$

ce qui est nul d'après l'équation du point b.

4. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine, A, B, C, D quatre points de $\mathcal{A}$. On appelle $P = \mathrm{bar}(A,B)$, $Q = \mathrm{bar}(B,C)$, $R = \mathrm{bar}(C,D)$, et $S = \mathrm{bar}(D,A)$ les milieux respectifs de (A,B), (B,C), (C,D) et (D,A).

a. Établir une relation entre les isobarycentres $\mathrm{bar}(A,B,C,D)$ et $\mathrm{bar}(P,Q,R,S)$.

$\surd$ *Par associativité des barycentres on a*

$$\mathrm{bar}(P,Q,R,S) = \mathrm{bar}(\mathrm{bar}(A,B),\mathrm{bar}(B,C),\mathrm{bar}(C,D),\mathrm{bar}(D,A)) =$$
$$= \mathrm{bar}(A,B,B,C,C,D,D,A) = \mathrm{bar}((A,2),(B,2),(C,2),(D,2)) = \mathrm{bar}(A,B,C,D).$$

b. Soit $M \in \mathcal{A}$ un point, et soient P', Q', R', S' les symétriques de M par rapport a P, Q, R, S, respectivement. Exprimer l'isobarycentre $\mathrm{bar}(P,Q,R,S)$ de P,Q,R,S comme un barycentre pondéré des points M, P', Q', R', S'.

$\surd$ *Par construction on a* $P = \mathrm{bar}(M,P')$, $Q = \mathrm{bar}(M,Q')$, $R = \mathrm{bar}(M,R')$, *et* $S = \mathrm{bar}(M,S')$. *Alors*

$$\mathrm{bar}(P,Q,R,S) = \mathrm{bar}(M,P',M,Q',M,R',M,S') = \mathrm{bar}((M,4),(P',1),(Q',1),(R',1),(S',1)).$$

c. Montrer que $\mathrm{bar}(A,B,C,D)$ est le milieu des points M et $\mathrm{bar}(P',Q',R',S')$.

$\surd$ *D'après les deux questions précédentes on a*

$$\mathrm{bar}(A,B,C,D) = \mathrm{bar}(P,Q,R,S) = \mathrm{bar}((M,4),(P',1),(Q',1),(R',1),(S',1)) =$$
$$= \mathrm{bar}((M,4),(\mathrm{bar}(P,Q,R,S),4)) = \mathrm{bar}(M,\mathrm{bar}(P,Q,R,S)).$$

 Fin.