Corrigé Examen 6L19 : Géométrie mercredi 16 juin 2010
9h00–12h00

1. Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$ un triangle dans un plan affine $\mathcal{A}$, donnant un repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$. En termes de paramètres α, β, γ on définit les points $P = (0, \alpha, 1-\alpha)_{\mathcal{S}}$, $Q = (1-\beta, 0, \beta)_{\mathcal{S}}$ et $R = (\gamma, 1-\gamma, 0)_{\mathcal{S}}$.

a. Quels sont les lieux des points P, Q, et R, c'est-à-dire les ensembles de points qu'ils parcourent respectivement quand on varie les paramètres α, β, γ ?

$\surd$ *Par définition $P = \mathrm{bar}((B, \alpha), (C, 1-\alpha))$ est un point de la droite $\mathcal{D}_{B,C}$, qui est l'ensemble des barycentres pondérés formés de B et C. Or tout barycentre est égal à un barycentre normalisé (somme des poids égale à 1) dont P donne la forme générale, donc P parcourt toute la droite quand α varie. De façon similaire le lieu de Q est $\mathcal{D}_{A,C}$, et le lieu de R est $\mathcal{D}_{A,B}$.*

b. On exclut les cas où l'un des points P, Q, R coïncide avec l'un des points A, B, C. Quelles sont les valeurs qu'il faudra alors exclure pour α, β, et γ ?

$\surd$ *Les points exclus sur $\mathcal{D}_{B,C}$ sont $B = (0, 1, 0)_{\mathcal{S}}$ et $C = (0, 0, 1)_{\mathcal{S}}$, donc les valeurs 0 et 1 sont à exclure pour α. Pour des raisons similaires les mêmes valeurs sont exclues pour β et γ.*

c. Donner une équation en ces variables qui exprime la condition que P, Q, et R soient alignés.

$\surd$ *On a vu que cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant des coordonnées barycentriques, c'est-à-dire*

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0, \iff \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 0.$$

d. Donner des coordonnées barycentriques des milieux $\mathrm{bar}(A, P)$, $\mathrm{bar}(B, Q)$ et $\mathrm{bar}(C, R)$; montrer qu'ils sont alignés si et seulement si P, Q et R sont alignés. [On dit: “les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés”. Le quadrilatère complet est formé par les côtés de A, B, C, et par la droite passant par P, Q et R; il compte 6 “sommets” A, B, C, D, E, F.]

$\surd$ *En coordonnés barycentriques, l'isobarycentre de deux points est calculé en prenant la moyenne dans chaque coordonnée (cela, et une formule similaire pour les barycentres généraux, ce montre facilement en utilisant la formule dite d'associativité des barycentres), autrement dit la moyenne vectorielle dans K^{n+1}. Ainsi on trouve $\mathrm{bar}(A, P) = \frac{1}{2}(1, \alpha, 1-\alpha)$, $\mathrm{bar}(B, Q) = \frac{1}{2}(1-\beta, 1, \beta)$, et $\mathrm{bar}(C, R) = \frac{1}{2}(\gamma, 1-\gamma, 1)$. En formant un déterminant (et mettant en facteur les $\frac{1}{2}$), on calcule*

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{8}(1 + \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\gamma) - \gamma(1-\alpha)) \\ &= \frac{1}{4}(1 - \alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{1}{4}((1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma), \end{aligned}$$

ce qui est nul si et seulement si P, Q et R sont alignés, d'après le point b.

e. Donner des coordonnées barycentriques des points $A' = Q + \overrightarrow{AR}$, $B' = R + \overrightarrow{BP}$, et $C' = P + \overrightarrow{CQ}$, et montrer que ces points aussi sont alignés si et seulement si P, Q et R le sont.

$\surd$ *Encore une fois on détermine les points en coordonnées barycentriques, et on évalue le déterminant. Pour le calcul des coordonnées barycentrique on peut remarquer qu'une expression d'un point comme combinaison linéaire d'autres points avec somme de coefficients égale à 1, telle que par exemple $A' = Q - A + R$, les coordonnées barycentriques sont données par la même combinaison linéaire $A' = ((1-\beta, 0, \beta) - (1, 0, 0) + (\gamma, 1-\gamma, 0))_{\mathcal{S}} = (\gamma - \beta, 1-\gamma, \beta)_{\mathcal{S}}$ (cela se justifie soit par comparaison avec les coordonnées cartésiennes, soit en considérant la combinaison linéaire comme un barycentre : $A' = \mathrm{bar}((Q, 1), (A, -1), (R, 1))$, et en utilisant la formule évoquée dans le point précédent). Pour B' et C' on fait le même calcul, et on évalue*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \gamma-\beta & 1-\gamma & \beta \\ \gamma & \alpha-\gamma & 1-\alpha \\ 1-\beta & \alpha & \beta-\alpha \end{vmatrix} &= 1 - \alpha - \beta - \gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(1 + 1 - 1) + \begin{vmatrix} \gamma-\beta & -\gamma & \beta \\ \gamma & \alpha-\gamma & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \beta-\alpha \end{vmatrix} \\ &= (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma = 0, \end{aligned}$$

d'après l'équation du point b, où le second déterminant s'annulait car ses colonnes sont linéairement dépendantes (leur somme étant nulle).

2. Dans un plan affine euclidien, on considère trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, sécantes deux à deux. On note par s_i la réflexion orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_i$. La composée $\rho = s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre P avec $\{P\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, et la composée $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ \rho$ est une isométrie indirecte (ou anti-déplacement). Or, il existe deux types d'isométrie indirecte: les réflexions (qui possèdent des points fixes) et des réflexions glissées (qui n'en ont pas; elles s'écrivent comme la composée d'une réflexion et d'une translation parallèle à l'axe de la réflexion). On va caractériser le type de f.

a. Montrer que si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes, alors f est une réflexion (orthogonale).

$\surd$ *Dans ce cas $P \in \mathcal{D}_3$ est fixé par s_3 et donc par f, et ayant un point fixe, f est une réflexion.*

b. Réciproquement supposons que f soit la réflexion orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$. Montrer que $s_3 \circ f = \rho$ et en déduire que $P \in \mathcal{D}_3$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes.

$\surd$ *Comme $f = s_3 \circ \rho$ et $s_3 \circ s_3 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, on a $s_3 \circ f = \rho$. Le produit des réflexions s_3 et f étant la rotation ρ, le centre P de ρ est à l'intersection des axes de s_3 et f, et en particulier $P \in \mathcal{D}_3$.*

Comme application de ce résultat, considérons un triangle A, B, C, et prenons pour $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ des bissectrices des angles en A, B, C, respectivement. On rappelle qu'une telle bissectrice peut être interne (si la réflexion correspondante envoie par exemple la demi-droite $[AB)$ vers $[AC)$) ou externe (la réflexion envoie $[AB)$ vers la demi-droite complémentaire de $[AC)$).

c. Montrer que (quel que soit le type des bissectrices) f envoie la droite $\mathcal{D}_{A,C}$ sur elle-même.

$\surd$ *On a successivement $\mathcal{D}_{A,C} \overset{s_1}{\mapsto} \mathcal{D}_{A,B} \overset{s_2}{\mapsto} \mathcal{D}_{A,C} \overset{s_3}{\mapsto} \mathcal{D}_{A,C}$ donc $f(\mathcal{D}_{A,C}) = \mathcal{D}_{A,C}$.*

d. Si les bissectrices $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont toutes internes, montrer que $\overrightarrow{f}$ agit sur $\overrightarrow{\mathcal{D}_{A,C}}$ comme -1.

$\surd$ *Appelons $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs unitaires dans la direction de respectivement les demi-droites $[AB)$, $[BC)$ et $[CA)$, alors le fait que les bissectrices sont internes implique qu'on a successivement $\vec{u}_3 \overset{\vec{s}_1}{\mapsto} -\vec{u}_1 \overset{\vec{s}_2}{\mapsto} \vec{u}_2 \overset{\vec{s}_3}{\mapsto} -\vec{u}_3$, donc $\overrightarrow{f}(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$, et agit sur cette droite vectorielle, dont $\{\vec{u}_3\}$ est une base, comme -1.*

e. Conclure que dans ce cas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes.

$\surd$ *Si $A' = f(A) \in \mathcal{D}_{A,C}$ et $M = \mathrm{bar}(A, A')$ on a $f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = A' - \overrightarrow{AM} = M$. Comme f a un point fixe M, c'est une réflexion, et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes, d'après le point b. (En fait f est la réflexion par rapport à la droite orthogonale à $\mathcal{D}_{A,C}$ passant par M. Si au lieu de trois bissectrices internes on avait pris une bissectrice interne et deux bissectrices externes, on trouverait le même résultat. Si le nombre de bissectrices internes était 2 ou 0, alors $\overrightarrow{f}$ agirait comme $+1$ sur $\overrightarrow{\mathcal{D}_{A,C}}$, et f n'aurait pas de points fixes: ce serait une réflexion glissée dont $\mathcal{D}_{A,C}$ est "l'axe".)*

3. Soit $\Gamma = \mathcal{S}(\Omega, r)$ un cercle dans le plan affine euclidien $\mathcal{A}$, de centre $\Omega \in \mathcal{A}$ et de rayon $r > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$ un point du plan quelconque. On appelle *puissance de A par rapport* à Γ le nombre $P_\Gamma(A) = d(A, \Omega)^2 - r^2$ (où $d(,)$ désigne la distance). On a donc $A \in \Gamma$ si et seulement si $P_\Gamma(A) = 0$.

a. Donner un argument montrant le fait (bien connu) qu'aucune droite de $\mathcal{A}$ ne peut couper Γ en plus de deux points. [Vous avez le choix parmi plusieurs arguments simples, algébriques ou géométriques; il s'agit juste de trouver quelque chose qui soit mieux que "ça ce voit".]

$\surd$ *Un argument géométrique: pour une paire de points d'intersection, leur médiatrice (orthogonale à la droite) passe par le centre Ω de Γ, donc la projection orthogonale de Ω sur la droite est le milieu des deux points; il ne peut pas aussi être le milieu d'un d'eux et un troisième point. Un argument algébrique: en choisissant une coordonnée sur la droite, la condition d'être à distance r de Ω donne une équation quadratique, qui a donc au plus 2 solutions.*

b. Soit $P, Q \in \Gamma$ diamétralement opposés (donc $\overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{\Omega Q}$). Montrer que $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle = P_\Gamma(A)$.

$\surd$ *Soit $\vec{x} = \overrightarrow{A\Omega}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{P\Omega} = \overrightarrow{\Omega Q}$; $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = d(A, \Omega)^2 - r^2 = P_\Gamma(A)$.*

c. Avec toujours $P \in \Gamma$, supposons que $\mathcal{D}_{A,P} \cap \Gamma = \{P, R\}$. Montrer que $P_\Gamma(A) = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR} \rangle$. Qu'est-ce qu'on peut dire si la droite $\mathcal{D}_{A,P}$ est tangente à Γ en P ?

$\surd$ *Comme $R \in \Gamma$ on a $\langle \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ} \rangle = P_\Gamma(R) = 0$ d'après le point b, donc $\mathcal{D}_{A,P} = \mathcal{D}_{R,P} \perp \mathcal{D}_{R,Q}$, et $\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR} \rangle = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{RQ} \rangle = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ} \rangle - \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{RQ} \rangle = P_\Gamma(A) - 0 = P_\Gamma(A)$. Dans le cas $\mathcal{D}_{A,P} \cap \Gamma = \{P\}$, l'argument donné reste valable si l'on pose $R = P$, sauf qu'on ne peut pas utiliser $\mathcal{D}_{R,P}$ (qui n'existe pas), mais $\mathcal{D}_{A,P} \perp \mathcal{D}_{R,Q}$ est une conséquence de la tangence (car $\mathcal{D}_{P,Q}$ est un diamètre de Γ); on conclut que dans ce cas $P_\Gamma(A) = \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP} \rangle = \|\overrightarrow{AP}\|^2$.*

On peut donc caractériser la puissance d'un point A par rapport à Γ comme la valeur constante de $\langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AT} \rangle$ pour toute paire de points S, T telle que $\mathcal{D} \cap \Gamma = \{S, T\}$ pour une droite $\mathcal{D}$ passant par A.

d. Soit $\Delta = \mathcal{S}(\Omega', s)$ un autre cercle, non concentrique à Γ (c'est-à-dire $\Omega' \neq \Omega$). On définit *l'axe radical des cercles* Γ *et* Δ comme l'ensemble $V = \{ A \in \mathcal{A} \mid P_\Gamma(A) = P_\Delta(A) \}$. Montrer que V est une droite orthogonale à $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$.

$\surd$ *On a* $P_\Gamma(A) - P_\Delta(A) = \langle \overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{A\Omega} \rangle - r^2 - \langle \overrightarrow{A\Omega'}, \overrightarrow{A\Omega'} \rangle + s^2 = \langle \overrightarrow{\Omega'\Omega}, 2\overrightarrow{AM} \rangle + s^2 - r^2$ *où* $M = \mathrm{bar}(\Omega, \Omega')$, *car* $\overrightarrow{A\Omega} - \overrightarrow{A\Omega'} = \overrightarrow{\Omega'\Omega}$, *et* $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{A\Omega'} = 2\overrightarrow{AM}$. *L'application* $A \mapsto P_\Gamma(A) - P_\Delta(A)$ *est donc une application affine de* A, *dont l'application linéaire associée* $v \mapsto \langle \overrightarrow{\Omega'\Omega}, 2\vec{v} \rangle$ *a pour noyau* $\langle \overrightarrow{\Omega'\Omega} \rangle^\perp$, *donc l'ensemble* V *où l'application affine s'annule est une droite orthogonale à* $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$.

e. Supposons que $\Gamma \cap \Delta = \{S, T\}$; montrer que $V = \mathcal{D}_{S,T}$. Qu'est-ce qu'on peut dire si $\Gamma \cap \Delta = \{S\}$?

$\surd$ *On peut calculer pour tout point* $A \in \mathcal{D}_{S,T}$ *que* $P_\Gamma(A) = \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AT} \rangle = P_\Delta(A)$ *donc* $\mathcal{D}_{S,T} \subseteq V$, *et comme* $\mathcal{D}_{S,T}$ *et* V *sont des droites on a égalité* $\mathcal{D}_{S,T} = V$. *On pourrait aussi raisonner que* S *et* T, *ayant puissance* 0 *par rapport aux deux cercles, sont certainement sur* V, *et ce dernier étant une droite on a* $V = \mathcal{D}_{S,T}$. *Si* $\Gamma \cap \Delta = \{S\}$, *la droite* $\mathcal{D}$ *passant par* S *et orthogonal à* $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$ *est tangente aux deux cercles* Γ *et* Δ, *et pour* $A \in \mathcal{D}$ *on a* $P_\Gamma(A) = \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AS} \rangle = P_\Delta(A)$, *donc* $\mathcal{D} = V$.

f. Supposons maintenant que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle quelconque qui coupe Γ et Δ chacun en deux points distincts, disons $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{A, B\}$ et $\mathcal{C} \cap \Delta = \{C, D\}$, et tel que $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ ne soient pas parallèles (un tel cercle existe toujours, on l'admet). Montrer que si $\mathcal{D}_{A,B} \cap \mathcal{D}_{C,D} = \{S\}$, alors $S \in V$ (donc V pourra être construit comme la droite orthogonale à $\mathcal{D}_{\Omega,\Omega'}$ passant par S).

$\surd$ *On sait que pour* $P \in \mathcal{D}_{A,B}$ *on a* $P_\Gamma(P) = P_\mathcal{C}(P)$, *et pour* $P \in \mathcal{D}_{C,D}$ *on a* $P_\mathcal{C}(P) = P_\Delta(P)$, *donc on a* $P_\Gamma(S) = P_\mathcal{C}(S) = P_\Delta(S)$ *et* $S \in V$.

Fin.