Corrigé Examen 6L19 : Géométrie 28 avril 2010

9h00–12h00

1. On se place dans un plan affine. Soient A, B, C et A', B', C' deux triangles avec $A' \neq A$, $B' \neq B$ et $C' \neq C$, et tels que $\mathcal{D}_{A,B} \parallel \mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{A,C} \parallel \mathcal{D}_{A',C'}$, et que $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ soient distincts.

Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant (connu comme étant la version affine du théorème de Desargues) : les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{B',C'}$ sont parallèles.

$\surd$ *Au préalable, il n'y a pas trois points alignés parmi A, B, A', B', car cela entraînerait l'alignement de ces 4 points, contredisant $\mathcal{D}_{A,A'} \neq \mathcal{D}_{B,B'}$, et de façon similaire pour A, C, A', C'; par conséquent chacun des points A, B, C, A', B', C' peut être décrit comme l'unique point d'intersection d'une des droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ et un côté du triangle A, B, C ou A', B', C' (on a même deux choix pour ce côté); de telles caractérisations seront utilisées implicitement dans les corrections ci-dessous.*

1. a. Montrer que si $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont parallèles, alors $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.

$\surd$ *Les points A, B, A', B' sont les intersections de deux paires de droites parallèles $(\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}_{A',B'})$ et $(\mathcal{D}_{A,A'}, \mathcal{D}_{B,B'})$, donc ils forment un parallélogramme, et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. De façon similaire on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, et on en déduit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'C'}$, d'où $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.*

b. Montrer que si $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont concourantes, alors $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.

$\surd$ *Soit P le point commun de $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ (ce point est distinct de A et A', car A, B, A', B' ne sont pas alignés). D'après le théorème de Thalès, il existe une homothétie de centre P qui envoie $\mathcal{D}_{A,B}$ vers $\mathcal{D}_{A',B'}$ et aussi une qui envoie $\mathcal{D}_{A,C}$ vers $\mathcal{D}_{A',C'}$; d'autre part il n'existe qu'une seule homothétie de centre P qui envoie A vers A' (celle de facteur $\overrightarrow{PA'}/\overrightarrow{PA}$) et les deux homothéties sont donc la même. Cette homothétie envoie donc $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$ et par conséquent $\mathcal{D}_{B,C}$ vers $\mathcal{D}_{B',C'}$, d'où $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.*

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{D}_{B,C}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{B',C'}$. Montrer que si parmi les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$, deux d'entre elles se coupent en un point, alors les trois droites sont concourantes. *(On pourra supposer que les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$ et $\mathcal{D}_{B,B'}$ se coupent en un point I et considérer une homothétie de centre I qui stabilise la droite $\mathcal{D}_{C,C'}$.)*

$\surd$ *Avec l'hypothèse $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$ la situation est parfaitement symétrique par rapport à (A, A'), (B, B') et (C, C'), donc on peut supposer que ce sont $\mathcal{D}_{A,A'}$ et $\mathcal{D}_{B,B'}$ qui se coupent en un point I. D'après le théorème de Thalès, il existe une homothétie de centre I qui envoie $\mathcal{D}_{A,B}$ vers $\mathcal{D}_{A',B'}$. Elle envoie $\mathcal{D}_{A,C}$ vers une droite parallèle à $\mathcal{D}_{A,C}$ qui passe par A', et c'est donc $\mathcal{D}_{A',C'}$; pour des raisons similaires elle envoie $\mathcal{D}_{B,C}$ vers $\mathcal{D}_{B',C'}$. Comme on a $\mathcal{D}_{A',C'} \cap \mathcal{D}_{B',C'} = \{C'\}$ l'homothétie envoie C vers C', d'où I, C, C' sont alignés, donnant le résultat cherché.*

3. Conclure en démontrant la version affine du théorème de Desargues.

$\surd$ *La partie "seulement si" du théorème a été démontrée dans la question 1. Pour la partie "si", la question 2 établit que, dès que deux des droites se coupent en un point, les trois droites sont concourantes et le théorème donc vérifié. Il reste le cas où aucune paire de droites parmi $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ se coupe en un point. Mais comme on est dans le plan ($\dim \mathcal{A} = 2$) cela veut dire que les droites sont 2 à 2 parallèles (éventuellement confondues), c'est-à-dire tous les trois parallèles (ici on n'a même pas besoin des hypothèses).*

2. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle A, B, C, isocèle en A. Soient P un point du segment $[B, C]$ et Δ la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_{B,C}$ passant par P. On note I le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}_{A,B}$ et J le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}_{A,C}$.

Le but de cet exercice est de montrer que la quantité $d(P, I) + d(P, J)$ est constante, c'est-à-dire indépendante du choix d'un point P sur le segment $[B, C]$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$ passant par A et soit σ la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$. Si M est un point du plan, on notera M' son image par σ.

1. a. Expliquer pourquoi les angles de droites $\widehat{\mathcal{D}_{B',A}\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{D}\mathcal{D}_{A,B}}$ et $\widehat{\mathcal{D}_{B,C}\mathcal{D}_{A,B}}$ sont égaux.

$\surd$ *Comme $A \in \mathcal{D}$ on a $A' = A$; comme $\mathcal{D}$ est une bissectrice de $\mathcal{D}_{A,B}$ et son image $\mathcal{D}_{B',A}$ par σ, on a $\widehat{\mathcal{D}\mathcal{D}_{A,B}} = \widehat{\mathcal{D}_{B',A}\mathcal{D}}$. Or par définition $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}_{B,C}$, d'où $\widehat{\mathcal{D}\mathcal{D}_{A,B}} = \widehat{\mathcal{D}_{B,C}\mathcal{D}_{A,B}}$.*

b. En déduire : $\mathcal{D}_{A,C} = \mathcal{D}_{A,B'}$.

$\surd$ *Le fait que le triangle A, B, C est isocèle en A donne $\widehat{\mathcal{D}_{C,B}\mathcal{D}_{B,A}} = \widehat{\mathcal{D}_{A,C}\mathcal{D}_{C,B}} = \widehat{\mathcal{D}_{A,C}\mathcal{D}}$, et donc avec ce qui précède $\mathcal{D}_{B',A} \parallel \mathcal{D}_{A,C}$. Comme ces deux droites ont le point A en commun, elles sont confondues.*

2. a. À l'aide de la question *1.b*, montrer que J est l'image de I par σ.

$\surd$ *On a $\Delta \perp \mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}$, donc la réflexion σ en $\mathcal{D}$ stabilise la droite Δ. En appliquant σ à $\mathcal{D}_{A,B} \cap \Delta = \{I\}$ on obtient alors $\mathcal{D}_{A,C} \cap \Delta = \{I'\} = \{J\}$ d'où $I' = J$.*

b. En déduire que $d(P, I) = d(P', J)$ puis que $d(P, I) + d(P, J) = d(P, P')$.

$\surd$ *Comme σ est une isométrie, on a $d(P, I) = d(P', I') = d(P', J)$. Par conséquent on a déjà $d(P, I) + d(P, J) = d(P', J) + d(P, J)$. Or les points P', J, P sont alignés (sur Δ) donc pourvu que J se trouve sur le segment $[P, P']$, on aura $d(P', J) + d(P, J)$. Considérons les projections $p_1 : \Delta \to \mathcal{D}_{A,C}$ parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$, et $p_2 : \mathcal{D}_{A,C} \to \mathcal{D}_{B,C}$ parallèle à Δ; ce sont des applications affines. On a $p_1(P') = B'$ (car $B' \in \mathcal{D}_{A,C}$ et $\overrightarrow{P'B'} \parallel \mathcal{D}_{B,C}$), $p_1(P) = C$, et $p_1(J) = J$ (car $J \in \mathcal{D}_{A,C}$), ainsi que $p_2(B') = B$ (car $\overrightarrow{BB'} \perp \mathcal{D} \perp \Delta$), $p_2(C) = C$ et $p_2(J) = P$. Alors la composition $p_2 \circ p1 : \Delta \to \mathcal{D}_{B,C}$ envoie le segment $[P', P]$ sur $[B, C]$ et le point J sur P, qui par hypothèse est sur le segment $[B, C]$. Cette application affine entre deux droites est non constante et donc inversible, et J doit donc être un point du segment $[P', P]$, comme voulu.*

3. Conclure.

$\surd$ *L'application linéaire $\vec{\sigma}$ fixe $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \overrightarrow{\mathcal{D}_{B,C}}$, donc on a pour tout vecteur $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_{B,C}}$ que $\overrightarrow{P'(P+\vec{x})'} = \vec{\sigma}(\vec{x}) = \vec{x}$ et donc $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{(P+\vec{x})(P+\vec{x})'}$, d'où $d(P + \vec{x}, (P + \vec{x})') = d(P, P')$. Cela montre que $d(P, P')$ ne dépend pas du choix de P sur $[B, C]$ (et même sur $\mathcal{D}_{B,C}$ si c'était permis), et avec le point 2 cela établit que $d(P, I) + d(P, J)$ ne dépend pas de ce choix non plus.*

3. On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\vec{i}$. Montrer que les applications affines $r \circ t$, $t \circ r$ et $t \circ r \circ t^{-1}$ sont des rotations de $\mathcal{P}$; pour chacune d'elles, préciser son angle et son centre.

$\surd$ *Ce sont toutes les trois des applications affines (car composées de telles), dont l'application linéaire associée est identique à celle $\vec{r}$ de r, parce que l'application linéaire associée à une translation est l'identité (par exemple $\overrightarrow{r \circ t} = \vec{r} \circ \vec{t} = \vec{r}$ et pareil pour les autres compositions). Il s'agit donc de rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$, et il convient d'en trouver à chaque fois le centre, c'est-à-dire son unique point fixe. Pour le dernier cas c'est le plus simple, car $(1, 0)_{\mathcal{R}} = t(O)$ est successivement envoyé*

$$t(O) \overset{t^{-1}}{\mapsto} O \overset{r}{\mapsto} O \overset{t}{\mapsto} t(O),$$

et est donc point fixe de $t \circ r \circ t^{-1}$. Pour les autres cas on peut exprimer r et t en coordonnées et résoudre les équations pour le point fixe: $r(x, y)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + y)_{\mathcal{R}}$ et $t(x, y)_{\mathcal{R}} = (x + 1, y)$ pour obtenir les systèmes

$$\begin{aligned} (x+1) - \sqrt{3}y &= 2x \\ \sqrt{3}(x+1) + y &= 2y \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x - \sqrt{3}y + 2 &= 2x \\ \sqrt{3}x + y &= 2y \end{aligned}$$

qui ont pour solution $(x, y)_{\mathcal{R}} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})_{\mathcal{R}}$ respectivement $(x, y)_{\mathcal{R}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})_{\mathcal{R}}$. En considérant le triangle équilatéral formé par ces deux points et O on voit facilement que ce sont effectivement des points fixes de $r \circ t$ respectivement $t \circ r$. On aurait pu simplement proposer ces points (obtenu par l'intuition géométrique) et vérifier qu'ils sont fixes. Une façon un peu moins calculatoire pour arriver à ce résultat est d'observer que r peut s'écrire comme la composée de deux réflexions en droites passant par O dont la seconde est tournée d'un angle $\frac{\pi}{6}$ par rapport à la première, et t comme la composée de deux réflexions en droites orthogonales à $\vec{i}$, et dont la seconde est translatée par $\frac{1}{2}\vec{i}$ par rapport à la première. Cela laisse une liberté de choisir ces droites, qu'on peut utiliser pour que dans la composée $r \circ t$ ou $t \circ r$ les réflexions au milieu s'annulent mutuellement. Ainsi pour $r \circ t$ on écrit $r = s_{\mathcal{D}_{2\pi/3}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}}$ où $\mathcal{D}_\phi = \langle \cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j} \rangle$, et $t = s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2} - \vec{i}/2}$, pour obtenir $r \circ t = s_{\mathcal{D}_{2\pi/3}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2} - \vec{i}/2} = s_{\mathcal{D}_{2\pi/3}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2} - \vec{i}/2}$, une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dont le centre est l'intersection des droites $\mathcal{D}_{2\pi/3}$ et $\mathcal{D}_{\pi/2} - \vec{i}/2$, *c'est-à-dire* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})_{\mathcal{R}}$. *Pour* $t \circ r$ *on écrit* $r = s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/3}}$, *et* $t = s_{\mathcal{D}_{\pi/2}+\vec{\imath}/2} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}}$, *pour obtenir* $t \circ r = s_{\mathcal{D}_{\pi/2}+\vec{\imath}/2} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/2}} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/3}} = s_{\mathcal{D}_{\pi/2}+\vec{\imath}/2} \circ s_{\mathcal{D}_{\pi/3}}$, *une rotation d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *dont le centre est l'intersection des droites* $\mathcal{D}_{\pi/3}$ *et* $\mathcal{D}_{\pi/2} + \vec{\imath}/2$, *c'est-à-dire* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})_{\mathcal{R}}$.

4. On rappelle qu'une *symétrie* d'un espace affine $\mathcal{A}$ est une application affine $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Pour un sous-espace affine $\mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel G supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ dans $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$, la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ et de direction G est donnée par $A \mapsto A + 2\overrightarrow{Ap(A)}$ où p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèle à G. Toute symétrie de $\mathcal{A}$ est de cette forme (on l'admet).

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 3. On dit qu'une application affine f de $\mathcal{A}$ est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$. Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on notera $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Soient $\mathcal{F}$ et G comme ci-dessus, et soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ et de direction G. Si $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, montrer que $s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$ si et seulement si $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

$\surd$ *Appliqué à un point A, la condition* $s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$ *donne* $s(A + \vec{u}) = s(A) + \vec{u}$. *Or on a toujours* $s(A + \vec{u}) = s(A) + \vec{s}(\vec{u})$ *(parce que s est une application affine), donc la condition devient* $\vec{u} = \vec{s}(\vec{u})$, *c'est-à-dire* $\vec{u} \in \mathrm{Fix}(\vec{s})$. *Mais* $\vec{s}$ *est la projection linéaire sur* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ *parallèle à G, donc* $\mathrm{Fix}(\vec{s}) = \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t), où s est une symétrie et t une translation telles que $f = s \circ t = t \circ s$, est unique.

$\surd$ *Il est clair que si on peut déduire s ou t avec certitude de f, l'autre sera aussi déterminé, car* $t = s \circ f = f \circ s$ *et* $s = f \circ t^{-1} = t^{-1} \circ f$. *Or si on calcule* $f \circ f = (t \circ s) \circ (s \circ t) = t \circ t$ *on voit que t est forcément la translation par* $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\,f(f(A))}$ *pour un point quelconque A. Une autre approche est basée sur le passage aux applications linéaires: de* $f = s \circ t$ *on déduit* $\vec{f} = \vec{s} \circ \vec{t} = \vec{s}$ *(car* $\vec{t} = \mathrm{id}_E$ *pour toute translation t), d'où* $\vec{s}$ *et aussi les sous-espaces vectoriels* $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \mathrm{Fix}(\vec{s})$ *et* $G = \mathrm{Fix}(-\vec{s})$ *sont déterminés par f; on peut alors pour* $A \in \mathcal{A}$ *quelconque décomposer le vecteur* $\overrightarrow{Af(A)}$ *en ses composantes* $\vec{u} = \overrightarrow{A\,t(A)} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ *(d'après la question 1) et* $\overrightarrow{t(A)\,f(A)} = \overrightarrow{A\,s(A)} \in G$, *donnant t et s.*

3. Soit f une application affine de $\mathcal{A}$ telle que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$. On pose $s = f \circ t_{\vec{u}}^{-1} = f \circ t_{-\vec{u}}$.

a. Montrer que s et $t_{2\vec{u}}$ commutent.

$\surd$ $s \circ t_{2\vec{u}} = f \circ t_{-\vec{u}} \circ t_{2\vec{u}} = f \circ t_{\vec{u}} = f \circ t_{2\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = f \circ f \circ f \circ t_{-\vec{u}} = t_{2\vec{u}} \circ s$.

b. Montrer que l'application linéaire associée à s est une symétrie vectorielle dont l'espace des vecteurs fixes contient $\vec{u}$.

$\surd$ *On a* $\vec{s} = \vec{f}$ *(comme dans la correction de la question 2) et* $\vec{f} \circ \vec{f} = \overrightarrow{t_{2\vec{u}}} = \mathrm{id}_E$ *donc* $\vec{s}$ *est une symétrie vectorielle. La commutation de s et* $t_{2\vec{u}}$ *entraînent* $2\vec{u} \in \mathrm{Fix}(\vec{s})$ *comme dans le corrigé de la question 1 (la première partie n'utilise pas que s est symétrie), et donc* $\vec{u} \in \mathrm{Fix}(\vec{s})$.

c. En déduire que s est une symétrie de $\mathcal{A}$, puis que $f = s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$.

$\surd$ *Pour* $A \in \mathcal{A}$ *on calcule* $s(s(A)) = f(f(A) - \vec{u}) - \vec{u} = f(f(A)) + \vec{f}(-\vec{u}) - \vec{u} = t_{s\vec{u}}(A) - 2\vec{u} = A$, *donc* $s \circ s$ *est une symétrie. Or* $s = f \circ t_{-\vec{u}}$ *donne* $f = s \circ t_{\vec{u}}$, *et on a déjà argumenté que la commutation de s et* $t_{\vec{u}}$ *est équivalente à* $\vec{u} \in \mathrm{Fix}(\vec{s})$, *le fait démontré dans le point b.*

4. En utilisant la question *3*, montrer qu'une application affine f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.

$\surd$ *Dans la question 3 on a démontré la direction "si". Réciproquement pour une symétrie-translation* $f = s \circ t = t \circ s$ *on a* $f \circ f = t \circ s \circ s \circ t = t \circ t$, *manifestement une translation.*

5. Déduire de la question *4* que la composée d'une symétrie et d'une translation quelconques est une symétrie-translation.

$\surd$ *Fixant une symétrie s et une translation* $t_{\vec{x}}$ *pour* $\vec{x} \in E$ *quelconque, il suffit d'après la question 4 de montrer que* $(s \circ t_{\vec{x}})^2$ *est une translation. Pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *on a* $(s \circ t_{\vec{x}})^2(A) = s(s(A + \vec{x}) + \vec{x}) = s(s(A + \vec{x})) + \vec{s}(\vec{x}) = A + \vec{x} + \vec{s}(\vec{x})$ *donc* $(s \circ t_{\vec{x}})^2$ *est bien une translation par* $\vec{x} + \vec{s}(\vec{x})$ *(un vecteur qui ne dépend pas de A).*

6. Application : décomposer l'application affine f dont la forme analytique dans un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathcal{A}$ est donnée par

$$f((x, y, z)_{\mathcal{R}}) = \big((x - 2y - 2z + 1)/3, (-2x + y - 2z + 2)/3, (-2x - 2y + z - 1)/3\big)_{\mathcal{R}}$$

en la composée d'une symétrie et d'une translation.

$\surd$ *On a* $f(f(O)) = f(1/3, 2/3, -1/3)_{\mathcal{R}} = (2/9, 8/9, -10/9)_{\mathcal{R}}$, *donc la translation est par le vecteur de coordonnées* $(1/9, 4/9, -5/9)$. *Par soustraction de ce vecteur de l'image de f on trouve*

$$s((x, y, z)_{\mathcal{R}}) = \big((3x - 6y - 6z + 2)/9, (-6x + 3y - 6z + 2)/9, (-6x - 6y + 3z + 2)/9\big)_{\mathcal{R}}.$$

Fin.