Corrigé Contrôle continu 6L19 : Géométrie 1er mars 2009
10h00–12h00

1. Dans cet exercice, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine réel de dimension 3.

a. Soit $\mathcal{R} = \big(O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})\big)$ un repère cartésien de $\mathcal{A}$. Si M est un point de $\mathcal{A}$, on note x_M, y_M, z_M ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, de sorte que $M = (x_M, y_M, z_M)_{\mathcal{R}}$. Pour tout quadruplet de points (M, N, P, Q) de $\mathcal{A}$, montrer l'équivalence :

$$(M,N,P,Q) \text{ sont coplanaires} \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_M & x_N & x_P & x_Q \\ y_M & y_N & y_P & y_Q \\ z_M & z_N & z_P & z_Q \end{vmatrix} = 0$$

$\surd$ *Le rang de la matrice dont on prend le déterminant est* $\dim \operatorname{Aff}(M,N,P,Q)+1$*, d'après un résultat du cours; dire que* (M,N,P,Q) *sont coplanaires veut dire* $\dim \operatorname{Aff}(M,N,P,Q) \leq 2$*, c'est-à-dire que cette matrice est de rang* ≤ 3 *et qu'elle est donc de déterminant* 0*. Plus explicitement, par des opérations avec la première colonne et un développement par la première ligne, le déterminant est égal à*

$$\begin{vmatrix} x_N - x_M & x_P - x_M & x_Q - x_M \\ y_N - y_M & y_P - y_M & y_Q - y_M \\ z_N - z_M & z_P - z_M & z_Q - z_M \end{vmatrix}$$

qui est le déterminant, dans le repère $\mathcal{R}$*, des vecteurs* $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$*; les points* M,N,P,Q *sont coplanaires précisément quand ces vecteurs sont liés, et le déterminant donc nul.*

b. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de $\mathcal{A}$, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels, tous différents de -1. Les points E, F, G, H de $\mathcal{A}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{bar}\big((A,1),(B,\alpha)\big) \\ F &= \operatorname{bar}\big((B,1),(C,\beta)\big) \\ G &= \operatorname{bar}\big((C,1),(D,\gamma)\big) \\ H &= \operatorname{bar}\big((D,1),(A,\delta)\big) \end{aligned}$$

Exprimer les coordonnées de A, B, C, D et E, F, G, H dans un repère cartésien de $\mathcal{A}$ bien choisi.

$\surd$ *On prend* $\mathcal{R}' = \big(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\big)$*, dans quel repère on a*

$$\begin{aligned} E &= \big(\tfrac{\alpha}{\alpha+1}, 0, 0\big)_{\mathcal{R}'}, \\ F &= \big(\tfrac{1}{\beta+1}, \tfrac{\beta}{\beta+1}, 0\big)_{\mathcal{R}'}, \\ G &= \big(0, \tfrac{1}{\gamma+1}, \tfrac{\gamma}{\gamma+1}\big)_{\mathcal{R}'}, \\ H &= \big(0, 0, \tfrac{1}{\delta+1}\big)_{\mathcal{R}'}. \end{aligned}$$

c. Déduire des questions *a* et *b* une condition nécessaire et suffisante pour que les points E, F, G, H soient coplanaires.

$\surd$ *La matrice du point a devient dans ce cas, après multiplication de ses colonnes respectivement par les scalaires non nuls* $\alpha+1$*,* $\beta+1$*,* $\gamma+1$*, et* $\delta+1$*, et soustraction de ses trois autre lignes de sa première ligne,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est $1 - \alpha\beta\gamma\delta$*. Comme, à un facteur non nul près, c'est le déterminant en termes duquel la question a donne une condition nécessaire et suffisante pour que les points* E, F, G, H *soient coplanaires, on obtient pour cette condition :* $\alpha\beta\gamma\delta = 1$*.*

d. Trouver des équations en coordonnées cartésiennes, par rapport au repère cartésien choisi à la question *b*, des plans affines $\mathrm{Aff}(E, C, D)$, $\mathrm{Aff}(F, D, A)$, $\mathrm{Aff}(G, A, B)$, et $\mathrm{Aff}(H, B, C)$.

√ *On voit facilement qu'il s'agit vraiment des plans; si par exemple E était aligné avec C et D, ce serait un point d'intersection de $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$, contredisant l'hypothèse que A, B, C, D ne sont pas coplanaires. Il suffit alors de trouver des équations vérifiées à chaque fois par les coordonnés des trois point concernés, comme le sont*

$$\begin{aligned}(\alpha+1)x+\alpha y+\alpha z=\alpha \quad &\text{pour } \mathrm{Aff}(E,C,D),\\ -\beta x+y=0 \quad &\text{pour } \mathrm{Aff}(F,D,A),\\ -\gamma y+z=0 \quad &\text{pour } \mathrm{Aff}(G,A,B),\\ x+y+(\delta+1)z=1 \quad &\text{pour } \mathrm{Aff}(H,B,C).\end{aligned}$$

e. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre plans affines aient au moins un point en commun.

√ *On considère le système d'équations linéaires donné par les équations des quatre plans de la question d. On peut éliminer $y = \beta x$ et $z = \gamma y$ par les équations 2 et 3, ce qui réduit le système d'équations à un système équivalent en x seulement:*

$$\begin{aligned}(1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma)x&=\alpha,\\ (1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta)x&=1.\end{aligned}$$

Ensuite on soustrait α fois la dernière équation de la première, qui devient $(1-\alpha\beta\gamma\delta)x = 0$; comme la dernière équation montre qu'en tout cas $x \neq 0$, on obtient comme condition nécessaire pour une solution $\alpha\beta\gamma\delta = 1$. Si cette condition est vérifiée, il ne reste que la dernière équation, qui est soluble pour x pourvu que le coefficient de x soit non nul; on obtient comme condition nécessaire et suffisante:

$$\alpha\beta\gamma\delta = 1 \quad \text{et} \quad 1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta \neq 0.$$

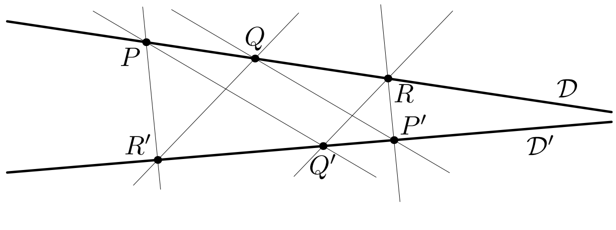
On peut remarquer que sous ces conditions, les plans ont précisément un point en commun. (L'inégalité finale peut aussi se formuler sous la forme $1 + \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma \neq 0$, ou encore d'autres; la solution pour le point d'intersection des quatre plans n'est pas particulièrement belle:

$$\big((1/(1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta), 1/(1+\gamma+\gamma\delta+\gamma\delta\alpha), 1/(1+\delta+\delta\alpha+\delta\alpha\beta)\big)_{\mathcal{R}'}.$$

D'ailleurs, tout cet exercice permet une solution plus symétrique et donc plus simple, en utilisant des coordonnées barycentriques, dans le repère affine (A, B, C, D), au lieu de coordonnées cartésiennes.)

2. Dans cette partie on démontrera le théorème de Pappus, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème de Pappus. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine $\mathcal{A}$, et des points $P, Q, R \in \mathcal{D}$ et $P', Q', R' \in \mathcal{D}'$ sur ces deux droites (dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent, ces points sont supposés tous distincts du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si $\mathcal{D}_{P,Q'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{Q,P'}$, et $\mathcal{D}_{P,R'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{R,P'}$, alors $\mathcal{D}_{Q,R'}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{R,Q'}$.*



a. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

√ *Les points P, Q, P', Q' forment un parallélogramme, donc $\overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ}$, et de façon similaire $\overrightarrow{P'R'} = -\overrightarrow{PR}$; alors $\overrightarrow{Q'R'} = \overrightarrow{P'R'} - \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{QR}$, donc Q, R, Q', R' forment un parallélogramme et $\mathcal{D}_{Q,R'}$ et $\mathcal{D}_{R,Q'}$ sont parallèles comme voulu.*

b. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point S. [Indication: on pourra utiliser le théorème de Thalès.]

$\surd$ *D'après le théorème de Thalès, il existe des homothéties h_1, h_2 de centre S tels que $h_1(P) = Q$ et $h_1(Q') = P'$ ainsi que $h_2(R) = P$ et $h_2(P') = R'$: il suffit de prendre h_1 de rapport $\lambda = \overrightarrow{SQ}/\overrightarrow{SP}$ et h_2 de rapport $\mu = \overrightarrow{SP}/\overrightarrow{SR}$. Alors $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie $h_{S,\lambda\mu}$ de centre S et rapport $\lambda\mu$ et envoie $R \mapsto Q$, mais $h_2 \circ h_1 = h_{S,\mu\lambda}$ est la même homothétie (car $\mu\lambda = \lambda\mu$), et envoie $Q' \mapsto R'$; cette homothétie envoie donc $\mathcal{D}_{R,Q'}$ sur $\mathcal{D}_{Q,R'}$, et les deux droites sont parallèles.*

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{A}$ est quelconque, et que les points P, Q, R ne sont pas tous égaux. Déduire alors des hypothèses $\mathcal{D}_{P,Q'} \parallel \mathcal{D}_{Q,P'}$ et $\mathcal{D}_{P,R'} \parallel \mathcal{D}_{R,P'}$ que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

$\surd$ *Comme $\mathcal{D}_{P,Q'}$ et $\mathcal{D}_{Q,P'}$ sont parallèles, les points P, Q, P', Q' sont coplanaires, car tous dans $P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ'}) = Q + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP'})$, et par le même argument P, R, P', R' sont coplanaires. D'après l'hypothèse on a toujours soit $P \neq Q$ (et donc $P' \neq Q'$) soit $P \neq R$ (et donc $P' \neq R'$), et dans les deux cas on vient d'établir un plan qui contient deux points distincts de $\mathcal{D}$ et deux points distincts de $\mathcal{D}'$, et donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ toutes entières.*

d. En déduire le théorème de Pappus dans le cas général.

$\surd$ *Dans le cas où $P = Q = R$, la conclusion du théorème est triviale (car $\mathcal{D}_{R,Q'} = \mathcal{D}_{Q,R'}$). Dans le cas contraire les droites $\mathcal{D}$ et D' sont coplanaires d'après le point c, et tous les points et droites concernés par le théorème sont par construction dans ce plan affine engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (c'est vraiment un plan, car $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$); en remplaçant $\mathcal{A}$ par ce plan on peut donc se ramener au cas $\dim \mathcal{A} = 2$. Dans ce dernier cas si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, elles se coupent (leur directions sont différentes, et engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2, donc égal à $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ tout entier; un résultat de cours dit que deux sous-espaces dont les directions engendrent $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ se coupent toujours), donc les points a et b complètent la démonstration du le théorème de Pappus.*

Fin.