**Examen 6L19 : Géométrie** 6 mai 2009

9h–12h

Les documents et calculatrices sont **interdits**

Les trois parties indépendantes

Barème indicatif : chacune des 18 questions vaut au moins 1 point / 20.

**1.** Soit $\mathcal{A}$ un plan affine (sur un corps $K$), $A, B, C \in \mathcal{A}$ trois points non alignés, et $\alpha, \beta, \gamma \in K \setminus \{0, 1\}$ trois scalaires. On définit des points $P = \mathrm{bar}\big((B, \alpha), (C, 1-\alpha)\big)$, $Q = \mathrm{bar}\big((C, \beta), (A, 1-\beta)\big)$, et $R = \mathrm{bar}\big((A, \gamma), (B, 1-\gamma)\big)$.

*a.* Donner les coordonnés barycentriques de $P$, $Q$, et $R$ par rapport au repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$, et une condition sur $\alpha, \beta, \gamma$ qui est vérifiée si et seulement si $P$, $Q$ et $R$ sont alignés.

*b.* On définit $P'$ comme le point de $\mathcal{D}_{B,C}$ symétrique de $P$ par rapport au milieu de $(B, C)$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{bar}(P, P') = \mathrm{bar}(B, C)$, et de façon similaire on définit $Q' \in \mathcal{D}_{A,C}$ tel que $\mathrm{bar}(Q, Q') = \mathrm{bar}(A, C)$, et $R' \in \mathcal{D}_{A,B}$ tel que $\mathrm{bar}(R, R') = \mathrm{bar}(A, B)$. Donner les coordonnés barycentriques de $P'$, $Q'$, et $R'$ par rapport au repère affine $\mathcal{S}$.

*c.* Montrer que $P'$, $Q'$ et $R'$ sont alignés si et seulement si $P$, $Q$ et $R$ sont alignés.

*d.* Soit $G = \mathrm{bar}(A, B, C)$, l'isobarycentre des points $A, B, C$. Montrer que $G$ est également l'isobarycentre des points $A, P, P'$.

*e.* Soit $K = \mathrm{bar}(A, P)$. Déduire de la question précédente que $K$, $G$, et $P'$ sont alignés.

*f.* Trouver une homothétie de centre $G$ qui envoie $P'$ sur $K$.

*g.* Montrer que l'homothétie de la question précédente envoie également $Q'$ sur $L = \mathrm{bar}(B, Q)$ et $R'$ sur $M = \mathrm{bar}(C, R)$ ; conclure que $K$, $L$, $M$ sont alignés si et seulement si $P'$, $Q'$ et $R'$ sont alignés (et donc $P$, $Q$ et $R$ aussi, d'après la question $c$), et que dans ce cas la droite passant par $P', Q', R'$ et celle passant par $K, L, M$ sont parallèles.

*h.* Calculer les coordonnées barycentriques de $K$, $L$, et $M$ par rapport au repère affine $\mathcal{S}$, et retrouver la conclusion de la question $g$ (c'est-à-dire l'alignement et le parallélisme) par un calcul en coordonnées.

**2.** Dans cette partie $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien. Soit $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites affines de $\mathcal{P}$, avec $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$, et $\Gamma$ un cercle de centre $\Omega \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ qui coupe chacune des droites en deux points distincts. On appelle $P$ le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et $A, B, C, D$ les points d'intersection de $\Gamma$ avec les deux droites, de telle manière que $\Gamma \cap \mathcal{D}_1 = \{A, C\}$ et $\Gamma \cap \mathcal{D}_2 = \{B, D\}$.

*a.* Si $X$ et $Y$ désignent deux point distincts parmi $\{A, B, C, D\}$, montrer que la projection orthogonale de $\Omega$ sur la droite $\mathcal{D}_{X,Y}$ est située au milieu $\mathrm{bar}(X, Y)$ de $X$ et $Y$.

*b.* On pose $M = \mathrm{bar}(A, C)$ et $N = \mathrm{bar}(B, D)$. Montrer que $M, P, N, \Omega$ forment un rectangle.

*c.* Déduire des questions précédentes que la symétrie centrale $S_G$ par rapport à l'isobarycentre $G = \mathrm{bar}(A, B, C, D)$ intervertit les points $\Omega$ et $P$, autrement dit que $G = \mathrm{bar}(\Omega, P)$.

*d.* On pose $I = \mathrm{bar}(A, B)$, $J = \mathrm{bar}(B, C)$, $K = \mathrm{bar}(C, D)$ et $L = \mathrm{bar}(D, A)$. Montrer que $I, J, K, L$ forment un rectangle de centre $G$, et dont les côtés sont parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

*e.* Montrer que pour une droite quelconque $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{P}$, le point $G$ est à la même distance des deux projections orthogonales sur $\mathcal{D}$ de $P$ et de $\Omega$ : $d(G, p_{\mathcal{D}}(P)) = d(G, p_{\mathcal{D}}(\Omega))$.

*f.* Montrer que les 4 projections orthogonales $p_{\mathcal{D}}(P)$, où $\mathcal{D}$ est l'un de $\mathcal{D}_{A,B}$, $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,D}$, $\mathcal{D}_{D,A}$, ainsi que les 4 points $I, J, K, L$, se trouvent tous les 8 sur un même cercle de centre $G$.

**3.** Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ sont donnés deux points distincts $A, B$, et une droite $\mathcal{D}$ passant par $A$ qui n'est ni égale ni orthogonale à $\mathcal{D}_{A,B}$. On fera une construction valable pour tout $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$.

*a.* Montrer l'existence d'un cercle unique $\Gamma_P$ passant par $P$ et dont $\mathcal{D}_{A,B}$ est la tangente en $A$.

*b.* On définit $f : \mathcal{D} \setminus \{A\} \to \mathcal{P}$ par la condition que $\mathcal{D}_{B,P} \cap \Gamma_P = \{P, f(P)\}$ pour tout $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$. Expliquer que c'est une bonne définition, et décrire pour quel(s) point(s) $P$ on a $f(P) = P$.

*c.* Trouver l'angle de droites $(\widehat{\mathcal{D}_{A,f(P)}, \mathcal{D}_{f(P),B}})$, indépendamment du choix de $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$.

*d.* Décrire l'image $f(\mathcal{D} \setminus \{A\})$ de l'application $f$. [N.B. $f$ *n'est pas* une application affine.]

**Fin.**