Corrigé Examen 6L19 : Géométrie 6 mai 2009
9h–12h

1. Soit $\mathcal{A}$ un plan affine (sur un corps K), $A, B, C \in \mathcal{A}$ trois points non alignés, et $\alpha, \beta, \gamma \in K \setminus \{0,1\}$ trois scalaires. On définit des points $P = \operatorname{bar}\big((B,\alpha),(C,1-\alpha)\big)$, $Q = \operatorname{bar}\big((C,\beta),(A,1-\beta)\big)$, et $R = \operatorname{bar}\big((A,\gamma),(B,1-\gamma)\big)$.

a. Donner les coordonnés barycentriques de P, Q, et R par rapport au repère affine $\mathcal{S} = (A,B,C)$, et une condition sur α, β, γ qui est vérifiée si et seulement si P, Q et R sont alignés.

$\surd$ *$P = (0,\alpha,1-\alpha)_{\mathcal{S}}$, $Q = (1-\beta,0,\beta)_{\mathcal{S}}$, $R = (\gamma,1-\gamma,0)_{\mathcal{S}}$, quels points sont alignés si et seulement si $\alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 0$ (dont le premier membre est le déterminant des coordonnées). Tous les facteurs dans le premier membre étant non nuls à cause de $\{P,Q,R\} \cap \{A,B,C\} = \emptyset$, cette condition s'écrit aussi $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{\gamma}{1-\gamma} = -1$.*

b. On définit P' comme le point de $\mathcal{D}_{B,C}$ symétrique de P par rapport au milieu de (B,C), c'est-à-dire tel que $\operatorname{bar}(P,P') = \operatorname{bar}(B,C)$, et de façon similaire on définit $Q' \in \mathcal{D}_{A,C}$ tel que $\operatorname{bar}(Q,Q') = \operatorname{bar}(A,C)$, et $R' \in \mathcal{D}_{A,B}$ tel que $\operatorname{bar}(R,R') = \operatorname{bar}(A,B)$. Donner les coordonnés barycentriques de P', Q', et R' par rapport au repère affine $\mathcal{S}$.

$\surd$ *$P' = (0,1-\alpha,\alpha)_{\mathcal{S}}$, $Q = (\beta,0,1-\beta)_{\mathcal{S}}$, $R = (1-\gamma,\gamma,0)_{\mathcal{S}}$.*

c. Montrer que P', Q' et R' sont alignés si et seulement si P, Q et R sont alignés.

$\surd$ *La condition pour que P', Q', R' soient alignés est $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma = 0$, ce qui est équivalent à la condition pour que P, Q, R soient alignés.*

d. Soit $G = \operatorname{bar}(A,B,C)$, l'isobarycentre des points A, B, C. Montrer que G est également l'isobarycentre des points A, P, P'.

$\surd$ *On a $G = \operatorname{bar}(A,B,C) = \operatorname{bar}\big((A,1),(\operatorname{bar}(B,C),2)\big) = \operatorname{bar}\big((A,1),(\operatorname{bar}(P,P'),2)\big) = \operatorname{bar}(A,P,P')$.*

e. Soit $K = \operatorname{bar}(A,P)$. Déduire de la question précédente que K, G, et P' sont alignés.

$\surd$ *$G = \operatorname{bar}(A,P,P') = \operatorname{bar}\big((K,2),(P',1)\big)$ donc K, G, et P' sont alignés.*

f. Trouver une homothétie de centre G qui envoie P' sur K.

$\surd$ *Comme $2\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GP'} = 0$ d'après le point précédent, cette homothétie doit avoir facteur $-\frac{1}{2}$.*

g. Montrer que l'homothétie de la question précédente envoie également Q' sur $L = \operatorname{bar}(B,Q)$ et R' sur $M = \operatorname{bar}(C,R)$; conclure que K, L, M sont alignés si et seulement si P', Q' et R' sont alignés (et donc P, Q et R aussi, d'après la question *c*), et que dans ce cas la droite passant par P', Q', R' et celle passant par K, L, M sont parallèles.

$\surd$ *On a $G = \operatorname{bar}(B,Q,Q') = \operatorname{bar}\big((L,2),(Q',1)\big)$ et $G = \operatorname{bar}(C,R,R') = \operatorname{bar}\big((M,2),(R',1)\big)$ par des raisonnements similaires à ceux ci-dessus, d'où l'homothétie $h_{G,-\frac{1}{2}}$ envoie $Q' \mapsto L$ et $R' \mapsto M$. L'image par une homothétie (de facteur non nul) d'une droite $\mathcal{D}$ est toujours une droite parallèle à $\mathcal{D}$, donc les images K, L, M par $h_{G,-\frac{1}{2}}$ des points P', Q', R' sont alignés si ces derniers sont alignés, et dans ce cas ils le sont sur une droite parallèle, et réciproquement P', Q', R' sont les images par $h_{G,-2}$ de K, L, M, et donc alignés si K, L, M le sont.*

h. Calculer les coordonnées barycentriques de K, L, et M par rapport au repère affine $\mathcal{S}$, et retrouver la conclusion de la question *g* (c'est-à-dire l'alignement et le parallélisme) par un calcul en coordonnées.

$\surd$ *$K = \operatorname{bar}((1,0,0)_{\mathcal{S}},(0,\alpha,1-\alpha)_{\mathcal{S}}) = (\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2})_{\mathcal{S}}$ et de façon similaire $L = (\frac{1-\beta}{2},\frac{1}{2},\frac{\beta}{2})_{\mathcal{S}}$ et $M = (\frac{\gamma}{2},\frac{1-\gamma}{2},\frac{1}{2})_{\mathcal{S}}$. Ces point sont alignés si le déterminant de ces coordonnées est nul, soit*

$$\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1 & \beta \\ \gamma & 1-\gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma) = \frac{1}{4}\big((1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-\alpha\beta\gamma\big),$$

et c'est le cas précisément si les conditions équivalentes des questions a,c sont vérifiées. Pour le parallélisme le plus simple est de comparer des paires de vecteurs comme $\overrightarrow{P'Q'}$ et $\overrightarrow{KL}$. Dans le repère $\mathcal{S}$ ils sont $\overrightarrow{P'Q'} = v(\beta,\alpha-1,1-\alpha-\beta)_{\mathcal{S}}$ et $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}v(-\beta,1-\alpha,-1+\alpha+\beta)_{\mathcal{S}}$ (en utilisant la notation $v(x,y,z)_{\mathcal{S}}$ avec $x+y+z=0$ pour une vecteur dans un repère affine), d'où $\overrightarrow{P'Q'} = -2\overrightarrow{KL}$. En plus il s'agit de vecteurs non nuls, car (par exemple) $\beta \neq 0$; ceci prouve que les droites d'alignement sont parallèles.

2. Dans cette partie $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien. Soit $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites affines de $\mathcal{P}$, avec $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$, et Γ un cercle de centre $\Omega \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ qui coupe chacune des droites en deux points distincts. On appelle P le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et A, B, C, D les points d'intersection de Γ avec les deux droites, de telle manière que $\Gamma \cap \mathcal{D}_1 = \{A, C\}$ et $\Gamma \cap \mathcal{D}_2 = \{B, D\}$.

a. Si X et Y désignent deux point distincts parmi $\{A, B, C, D\}$, montrer que la projection orthogonale de Ω sur la droite $\mathcal{D}_{X,Y}$ est située au milieu $\mathrm{bar}(X, Y)$ de X et Y.

$\surd$ *Comme X et Y sont sur un cercle de centre Ω, ce dernier est sur la médiatrice de X et Y. Cette médiatrice est orthogonal à $\mathcal{D}_{X,Y}$ donc son point d'intersection avec $\mathcal{D}_{X,Y}$ est la projection orthogonale de Ω sur $\mathcal{D}_{X,Y}$. Mais ce point d'intersection est clairement le milieu de X et Y.*

b. On pose $M = \mathrm{bar}(A, C)$ et $N = \mathrm{bar}(B, D)$. Montrer que M, P, N, Ω forment un rectangle.

$\surd$ *D'après le point précédent M et N sont les projections orthogonales de Ω respectivement sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donc $\overrightarrow{M\Omega} \perp \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{M,P}$ et $\overrightarrow{N\Omega} \perp \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{N,P}$, or il est donné que $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$, donc $\overrightarrow{M\Omega} \| \mathcal{D}_2$ et $\overrightarrow{N\Omega} \| \mathcal{D}_1$ (car deux droites orthogonales à une même droite $\mathcal{D}$ sont parallèles), d'où le résultat.*

c. Déduire des questions précédentes que la symétrie centrale S_G par rapport à l'isobarycentre $G = \mathrm{bar}(A, B, C, D)$ intervertit les points Ω et P, autrement dit que $G = \mathrm{bar}(\Omega, P)$.

$\surd$ *On a $\mathrm{bar}(A, B, C, D) = \mathrm{bar}\big((M, 2), (N, 2)\big) = \mathrm{bar}(M, N)$; or le rectangle M, P, N, Ω est en particulier un parallélogramme, d'où $G = \mathrm{bar}(M, N) = \mathrm{bar}(\Omega, P)$, donc $S_G(\Omega) = P$ et $S_G(P) = \Omega$.*

d. On pose $I = \mathrm{bar}(A, B)$, $J = \mathrm{bar}(B, C)$, $K = \mathrm{bar}(C, D)$ et $L = \mathrm{bar}(D, A)$. Montrer que I, J, K, L forment un rectangle de centre G, et dont les côtés sont parallèles à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$\surd$ *On a également $G = \mathrm{bar}\big((I, 2), (K, 2)\big) = \mathrm{bar}(I, K)$ et $G = \mathrm{bar}(J, L)$, donc I, J, K, L est un parallélogramme de centre G. Or $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{JK}$, d'où le résultat.*

e. Montrer que pour une droite quelconque $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{P}$, le point G est à la même distance des deux projections orthogonales sur $\mathcal{D}$ de P et de Ω : $d(G, p_{\mathcal{D}}(P)) = d(G, p_{\mathcal{D}}(\Omega))$.

$\surd$ *La relation $G = \mathrm{bar}(\Omega, P)$ donne lieu à $p_{\mathcal{D}}(G) = \mathrm{bar}(p_{\mathcal{D}}(\Omega), p_{\mathcal{D}}(P))$ car une projection est une application affine. Si $p_{\mathcal{D}}(P) = p_{\mathcal{D}}(\Omega)$ il n'y a rien à démontrer, et sinon la médiatrice de $p_{\mathcal{D}}(P)$ et $p_{\mathcal{D}}(\Omega)$ est la droite orthogonal à $\mathcal{D}$ qui passe par $p_{\mathcal{D}}(G)$; comme $\overrightarrow{Gp_{\mathcal{D}}(G)} \perp \mathcal{D}$ cette médiatrice contient le point G, qui est donc équidistant de $p_{\mathcal{D}}(P)$ et $p_{\mathcal{D}}(\Omega)$.*

f. Montrer que les 4 projections orthogonales $p_{\mathcal{D}}(P)$, où $\mathcal{D}$ est l'un de $\mathcal{D}_{A,B}$, $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,D}$, $\mathcal{D}_{D,A}$, ainsi que les 4 points I, J, K, L, se trouvent tous les 8 sur un même cercle de centre G.

$\surd$ *Les points I, J, K, L, qui sont les projections orthogonales de Ω sur les côtés de A, B, C, D d'après la question a, sont équidistants de G d'après la question d, et d'après la question e chacune de ces projections est équidistante de G avec la projection de P sur le même côté. En conclusion, tous ces points sont à la même distance de G, et se trouvent donc sur un cercle commun de centre G.*

3. Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ sont donnés deux points distincts A, B, et une droite $\mathcal{D}$ passant par A qui n'est ni égale ni orthogonale à $\mathcal{D}_{A,B}$. On fera une construction valable pour tout $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$.

a. Montrer l'existence d'un cercle unique Γ_P passant par P et dont $\mathcal{D}_{A,B}$ est la tangente en A.

$\surd$ *Pour que $\mathcal{D}_{A,B}$ puisse être la tangente en A, il faut que le centre du cercle se trouve sur la droite orthogonale à $\mathcal{D}_{A,B}$ passant par A. Pour que ce cercle puise passer par P et par A, il faut que ce centre se trouve sur la médiatrice de P et A, qui est orthogonale à $\mathcal{D}$ et donc non parallèle à la première droite (car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{A,B}$ ne sont pas parallèles). Il existe donc un unique point d'intersection des ces deux droites, seul candidat pour le centre de Γ_P, et le cercle de ce centre qui passe par P possède clairement $\mathcal{D}_{A,B}$ comme la tangente en A ; ceci définit Γ_P.*

b. On définit $f : \mathcal{D} \setminus \{A\} \to \mathcal{P}$ par la condition que $\mathcal{D}_{B,P} \cap \Gamma_P = \{P, f(P)\}$ pour tout $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$. Expliquer que c'est une bonne définition, et décrire pour quel(s) point(s) P on a $f(P) = P$.

$\surd$ *La droite $\mathcal{D}_{B,P}$ possède certainement P comme point commun avec Γ_P. Or un cercle et une droite ne pas peuvent avoir plus que 2 points communs ; s'il y en a effectivement 2 alors $f(P)$ est l'autre point, s'il n'y a que le point P on est obligé de prendre $f(P) = P$. Ce dernier cas se produit si $\mathcal{D}_{B,P}$ est la tangente à Γ_P en P, et comme l'image de $\mathcal{D}_{A,B}$ par la réflexion par rapport à la médiatrice de A et P est une telle tangente, il faut que ce soit celle-ci. Cela veut dire que B se trouve sur cette médiatrice, ce qui permet de la décrire (indépendamment de P) comme la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par B. Finalement on voit que $f(P) = P$ si et seulement si P est l'image de A par la réflexion en cette droite (comme $\mathcal{D} \not\perp \mathcal{D}_{A,B}$ cette image est dans $\mathcal{D} \setminus \{A\}$).*

c. Trouver l'angle de droites $(\widehat{\mathcal{D}_{A,f(P)}, \mathcal{D}_{f(P),B}})$, indépendamment du choix de $P \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$.

$\surd$ *La droite $\mathcal{D}_{A,f(P)}$ est soit égale à $\mathcal{D}_{f(P),P}$, soit la tangente à Γ_P en $f(P) = P$; dans les deux cas le fait que $f(P)$, P, et A sont sur le cercle Γ_p, dont on appellera le centre Ω, entraîne d'après un résultat de cours que $\tilde{2}(\widehat{\mathcal{D}_{A,f(P)}, \mathcal{D}_{f(P),B}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega P}})$. Or $\mathcal{D}_{A,B}$ étant la tangente à Γ_p en A, on a par le même résultat que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega P}}) = \tilde{2}(\widehat{\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}})$, qui est en particulier indépendant du choix de P. L'application $\tilde{2}$ (doublement de l'angle) étant une bijection du groupe des angles de droites vers le groupe des angles de vecteurs, on peut conclure que $(\widehat{\mathcal{D}_{A,f(P)}, \mathcal{D}_{f(P),B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}})$.*

d. Décrire l'image $f(\mathcal{D} \setminus \{A\})$ de l'application f. [N.B. f *n'est pas* une application affine.]

$\surd$ *On a $f(P) \in \{\, Q \mid (\widehat{\mathcal{D}_{A,Q}, \mathcal{D}_{Q,B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}}) \,\} = \Delta \setminus \{A, B\}$ pour tout P, où Δ est un cercle passant par A et B et dont la tangente en A est $\mathcal{T} = S_{\mathcal{D}_{A,B}}(\mathcal{D})$, de sorte que $(\widehat{\mathcal{T}, \mathcal{D}_{A,B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}})$ (cocyclicité). Réciproquement tout $Q \in \Delta \setminus \{A, B\}$ s'écrit $f(P)$ avec P le point d'intersection de $\mathcal{D}_{B,Q}$ et $\mathcal{D}$, car $(\widehat{\mathcal{D}_{A,Q}, \mathcal{D}_{Q,B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{A,B}, \mathcal{D}})$ entraîne $Q \in \Gamma_F$. Alors $f(\mathcal{D} \setminus \{A\}) = \Delta \setminus \{A, B\}$.*

Fin.