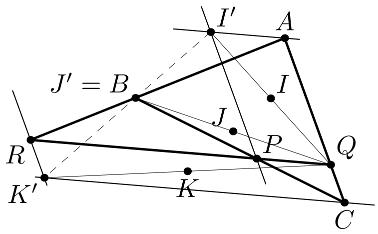
Corrigé Examen 6L19 : Géométrie 18 juin 2008

9h00–12h00

1. On a montré dans l'un des TD que si A, B, C est un triangle (donc A, B, C non alignés), et on choisit trois points *alignés* $P \in \mathcal{D}_{B,C}$, $Q \in \mathcal{D}_{A,C}$, et $R \in \mathcal{D}_{A,B}$, alors les milieux $I = \mathrm{bar}(A, P)$, $J = \mathrm{bar}(B, Q)$ et $K = \mathrm{bar}(C, R)$ sont aussi alignés (on dit que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés). Cela a été fait par un calcul en coordonnées barycentriques. On démontrera ici le même résultat de façon moins calculatoire en considérant certaines homothéties. On suppose que les points A, B, C, P, Q, R sont tous distincts (le cas contraire étant facile à traiter).



a. Soit $h_{Q,2}$ l'homothétie de centre Q et de rapport 2 ; on pose $I' = h_{Q,2}(I)$, $J' = h_{Q,2}(J)$, et $K' = h_{Q,2}(K)$. Pourquoi suffit-il de montrer que I', J' et K' sont alignés pour conclure que I, J, et K sont alignés ?

$\surd$ *Une homothétie transforme une droite en une droite, et donc des points alignés en des points alignés. Or $h_{Q,2}$ est inversible et sa réciproque $h_{Q,\frac{1}{2}}$ est aussi une homothétie ; si I', J' et K' sont alignés, ce sera aussi le cas de leurs images I, J, K par $h_{Q,\frac{1}{2}}$.*

b. Montrer que $I' = A + \overrightarrow{QP}$, ainsi que $J' = B$ et $K' = C + \overrightarrow{QR}$.

$\surd$ *On a $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$ donc $I' = Q + 2\overrightarrow{QI} = Q + 2(\overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP} = A + \overrightarrow{QP}$. De façon similaire $J = Q + \frac{1}{2}\overrightarrow{QB}$ donc $J' = Q + 2\overrightarrow{QJ} = Q + \overrightarrow{QB} = B$ et $K = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CR}$ donc $K' = Q + 2\overrightarrow{QK} = Q + 2(\overrightarrow{QC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CR}) = C + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = C + \overrightarrow{QR}$.*

c. Soit h_1 et h_2 les homothéties de centre B telles que $h_1(A) = R$ et $h_2(P) = C$. Expliquer que h_1 et h_2 sont bien définis, et vérifient $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

$\surd$ *En désignant par λ le rapport de h_1 on obtient l'équation $\overrightarrow{BR} = \lambda\overrightarrow{BA}$, qui a pour unique solution $\lambda = \overrightarrow{BR}/\overrightarrow{BA}$ car les points B, A, R sont alignés et distincts. De façon similaire $h_2 = h_{B,\mu}$ avec $\mu = \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{BP}$, bien défini car B, P, C sont alignés et distincts. Or $h_1 \circ h_2 = h_{B,\lambda\mu} = h_{B,\mu\lambda} = h_2 \circ h_1$.*

d. Montrer que h_1 envoie la droite $\mathcal{D}_{A,I'}$ sur $\mathcal{D}_{P,R}$ et $\mathcal{D}_{A,C}$ sur $\mathcal{D}_{R,K'}$, et que h_2 envoie $\mathcal{D}_{P,R}$ sur $\mathcal{D}_{C,K'}$ et $\mathcal{D}_{P,I'}$ sur $\mathcal{D}_{A,C}$. [Utiliser une propriété de l'image d'une droite par une homothétie.]

$\surd$ *L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une homothétie est toujours une droite parallèle à $\mathcal{D}$. Il suffira donc de vérifier que les doites indiquées comme image soient bien parallèles à leur original, en contiennent au moins un point de la vraie image. Ce dernier point est évident dans tous les cas, car $\mathcal{D}_{P,R}$ et $\mathcal{D}_{R,K'}$ contiennent $R = h_1(A)$, tandis que $\mathcal{D}_{C,K'}$ et $\mathcal{D}_{A,C}$ contiennent $C = h_2(P)$. Or pour le premier point*

$$\overrightarrow{\mathcal{D}_{P,R}} = \langle\overrightarrow{PR}\rangle = \langle\overrightarrow{QP}\rangle = \langle\overrightarrow{AI'}\rangle = \overrightarrow{\mathcal{D}_{A,I'}}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{D}_{R,K'}} = \langle\overrightarrow{RK'}\rangle = \langle\overrightarrow{QC}\rangle = \langle\overrightarrow{AC}\rangle = \overrightarrow{\mathcal{D}_{A,C}}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{D}_{C,K'}} = \langle\overrightarrow{CK'}\rangle = \langle\overrightarrow{QR}\rangle = \langle\overrightarrow{PR}\rangle = \overrightarrow{\mathcal{D}_{P,R}}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{D}_{A,C}} = \langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{QA}\rangle = \langle\overrightarrow{PI'}\rangle = \overrightarrow{\mathcal{D}_{P,I'}}$$

e. En déduire que la composée $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ envoie le point I' vers K', et conclure.

$\surd$ *On a $\{I'\} = \mathcal{D}_{A,I'} \cap \mathcal{D}_{P,I'}$ tandis que $(h_1 \circ h_2)(\mathcal{D}_{P,I'}) = h_1(\mathcal{D}_{A,C}) = \mathcal{D}_{R,K'}$ et $(h_2 \circ h_1)(\mathcal{D}_{A,I'}) = h_2(\mathcal{D}_{P,R}) = \mathcal{D}_{C,K'}$, d'où $(h_1 \circ h_2)(I') = (h_1 \circ h_2)(I') \in \mathcal{D}_{R,K'} \cap \mathcal{D}_{C,K'} = \{K'\}$, ce qui établit le premier point demandé. Or I' et son image K' sont certainement alignés avecle centre $J' = B$ de l'homothétie $h_1 \circ h_2 = h_{B,\lambda\mu}$ utilisée.*

2. Soit donné dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ non concourantes et deux à deux non parallèles.

a. Montrer que les points d'intersection de ces droites forment un triangle A, B, C : il existe trois points A, B, C non alignés tels que $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{A\}$, $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_1 = \{B\}$, et $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{C\}$.

$\surd$ *Chaque paire de deux droites, étant non parallèles, se coupe en un seul point, d'où l'existence des points A, B, C. Or si on avait $A \in \mathcal{D}_1$, les trois droites seraient concourantes en A, ce qui n'est pas les cas, donc $A \notin \mathcal{D}_1$ et en particulier A est distinct de B et C. Cela permet d'écrire $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{A,C}$, et comme $B \notin \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{A,C}$ par le même argument qui conduisait à $A \notin \mathcal{D}_1$, les points A, B, C sont non alignés.*

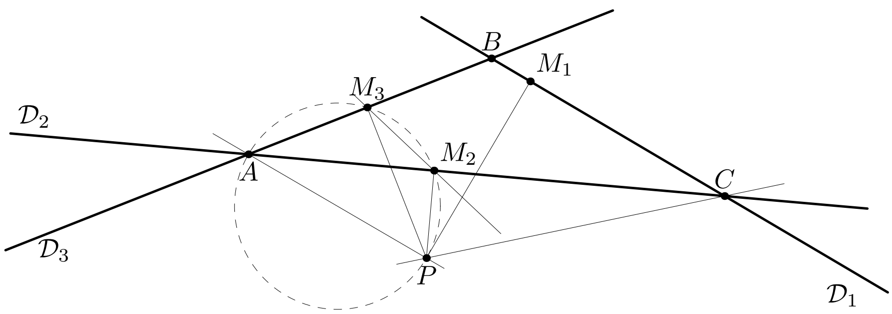
b. Soit P un point avec $P \notin \mathcal{D}_2$ (donc en particulier $P \notin \{A, C\}$. Expliquer pourquoi on a l'égalité

$$(\widehat{\mathcal{D}_{A,P}, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) + (\widehat{\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_1}) + (\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{C,P}}).$$

$\surd$ *En utilisant deux fois la relation de Chasles pour les angles, l'équation devient $(\widehat{\mathcal{D}_{A,P}, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_{C,P}})$, qui est une évidence car dans un angle de droites l'ordre des points ne joue pas un rôle : $\mathcal{D}_{A,P} = \mathcal{D}_{P,A}$ et $\mathcal{D}_{P,C} = \mathcal{D}_{C,P}$.*

c. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle A, B, C. Déduire du point précédent que $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$ si et seulement si $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) + (\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{C,P}}) = 0$ (où le «0» désigne l'angle nul de droites).

$\surd$ *Cette dernière équation revient à $(\widehat{\mathcal{D}_{A,P}, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_1})$, or on sait que l'angle des droites reliant P avec A respectivement C est égal à l'angle des droites $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_1$ reliant B avec A respectivement C si et seulement si A, B, C, P son cocycliques, c'est-à-dire $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$.*



d. Pour $i = 1, 2, 3$ on désigne par M_i l'image de P par projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}_i$. Montrer que M_2 et M_3 sont sur le cercle dont le segment $[P, A]$ forme un diamètre. En déduire que $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}})$ (les droites dans le second angle sont bien définies car $P \notin \mathcal{D}_2$ entraîne $P \neq M_2$, et $P \neq A$ entraîne $M_2 \neq M_3$).

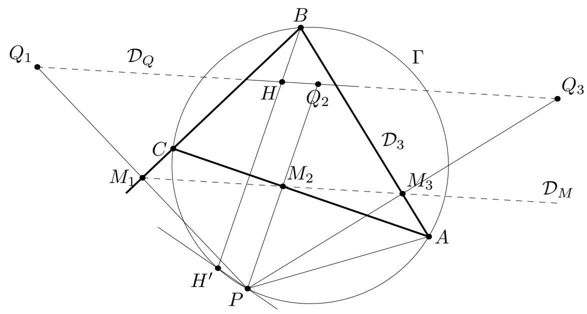
$\surd$ *On sait qu'un point X est sur le cercle dont $[P, A]$ forme un diamètre si et seulement si $\overrightarrow{XP}$ et $\overrightarrow{XA}$ sont orthogonaux (résultat vu en cours), or c'est le cas par définition pour M_2 et M_3. L'équation $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}})$ est une conséquence de la cocyclicité de P, A, M_2, M_3 quand $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{A,M_3}$, c'est-à-dire quand $M_3 \neq A$. Mais si $M_3 = A$ on a $\mathcal{D}_{M_2,M_3} = \mathcal{D}_2$, et dans ce cas les deux angles dans l'équation sont égaux à l'angle droite (qui est un unique angle de droites).*

e. Par un argument similaire (utilisant le segment $[P, C]$) on a aussi $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,P}})$ (l'admettre sans redonner une démonstration). Conclure que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$.

$\surd$ *En ajoutant les équations $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{P,C}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,P}})$ et $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}})$ on obtient $(\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3}) + (\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{C,P}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,P}}) + (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}})$; d'après le point c on a $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$ si et seulement si cette somme est l'angle nul; mais $(\widehat{\mathcal{D}_{M_1,M_2}, \mathcal{D}_{M_2,M_3}}) = 0$ veut dire que $\mathcal{D}_{M_1,M_2} = \mathcal{D}_{M_2,M_3}$, c'est-à-dire que M_1, M_2, M_3 sont alignés.*

f. Pour $i = 1, 2, 3$ soit Q_i l'image de P par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_i$. Expliquer que la condition « M_1, M_2, M_3 sont alignés » du point précédent équivaut à « Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés ».

$\surd$ *L'homothétie de rapport 2 et de centre P envoie M_i vers Q_i pour $i = 1, 2, 3$, et une homothétie conserve l'alignement (les images d'une collection de points sont alignés si et seulement si les points le sont).*



On suppose maintenant que $P \in \Gamma \setminus \{A, C\}$, de sorte que, par les arguments donnés, M_1, M_2, et M_3 sont alignés sur une droite qu'on appellera $\mathcal{D}_M$, et Q_1, Q_2, Q_3 sont alignés sur une droite $\mathcal{D}_Q$ (appelée « droite de Steiner » de P par rapport au triangle A, B, C). On rappelle que l'orthocentre H du triangle A, B, C est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle; on veut montrer que H est situé sur $\mathcal{D}_Q$. Quand $H = Q_2$ cela est évident, donc on supposera que $H \neq Q_2$.

g. Expliquer pourquoi il suffira de montrer que $\mathcal{D}_{Q_2,H}$ est parallèle à $\mathcal{D}_M$ (c'est-à-dire, montrer qui si $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_M$, alors $H \in \mathcal{D}_Q$).

$\surd$ *Par construction $\mathcal{D}_Q$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}_M$ (car c'est son image par une homothétie) qui passe par Q_2. Si aussi $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_{M_1,M_2}$, cela veut dire que $\mathcal{D}_{Q_2,H} = \mathcal{D}_Q$, et donc $H \in \mathcal{D}_Q$.*

h. On admettra que l'image H' de l'orthocentre H par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_{A,C}$ est l'un des deux points d'intersection de la hauteur issue de B du triangle A, B, C et son cercle circonscrit Γ (l'autre point d'intersection étant B). Montrer les égalités

$$(\widehat{\mathcal{D}_{P,Q_2}, \mathcal{D}_{Q_2,H}}) = -(\widehat{\mathcal{D}_{Q_2,P}, \mathcal{D}_{P,H'}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,H'}, \mathcal{D}_{H',B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3})$$

et conclure (en utilisant la question *d*) que $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_M$. [Chacune des égalités se justifie par un argument simple, tel que l'application d'une isométrie ou une cocyclicité, qu'on spécifiera.]

$\surd$ *La réflexion en $\mathcal{D}_2$ change l'orientation, et intervertit P et Q_2 ainsi que H et H', d'où on obtient $(\widehat{\mathcal{D}_{P,Q_2}, \mathcal{D}_{Q_2,H}}) = -(\widehat{\mathcal{D}_{Q_2,P}, \mathcal{D}_{P,H'}})$. On obtient $-(\widehat{\mathcal{D}_{Q_2,P}, \mathcal{D}_{P,H'}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,H'}, \mathcal{D}_{H',B}})$ en intervertissant les deux droites (qui change le signe) et en remplaçant $\mathcal{D}_{Q_2,P}$ par la droite $\mathcal{D}_{H',B}$ qui lui est parallèle (toutes deux étant orthogonales à $\mathcal{D}_2$). On a $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_{A,B}$, donc l'égalité $(\widehat{\mathcal{D}_{P,H'}, \mathcal{D}_{H',B}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,A}, \mathcal{D}_3})$ est une conséquence de cocyclicité de P, H', B, A sur le cercle Γ. Avec le résultat de la question d on a établi que $(\widehat{\mathcal{D}_{P,Q_2}, \mathcal{D}_{Q_2,H}}) = (\widehat{\mathcal{D}_{P,M_2}, \mathcal{D}_M})$, et comme $\mathcal{D}_{P,Q_2} = \mathcal{D}_{P,M_2}$ cela implique $\mathcal{D}_{Q_2,H} \parallel \mathcal{D}_M$.*

i. Par la construction ci-dessus, chaque point $P \in \Gamma$ détermine sa droite de Steiner $\mathcal{D}_Q$, qui passe par H (pour le raisonnement on a dû exclure les cas isolés $P = A$ et $P = C$, mais même pour ces cas la construction marche si l'on permute les rôles des points A, B, C). Montrer que réciproquement la droite de Steiner détermine P (c'est-à-dire indiquer comment à partir d'une droite $\mathcal{D}_Q$ passant par H, sans connaître ses points Q_1, Q_2, Q_3 ou d'autres données qui dépendent du choix de P, on peut retrouver géométriquement le point $P \in \Gamma$).

$\surd$ *Le point H', qui est l'image de H par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_2$, ne dépend pas du choix de P. Or, dans la première égalité $(\widehat{\mathcal{D}_{P,Q_2}, \mathcal{D}_{Q_2,H}}) = -(\widehat{\mathcal{D}_{Q_2,P}, \mathcal{D}_{P,H'}})$ de la question h, on peut replacer la droite (inconnue) $\mathcal{D}_{P,Q_2}$ par la droite $\mathcal{D}_{B,H'}$ (c'est-à-dire par la hauteur de A, B, C issue de B), car les deux droites sont orthogonales à $\mathcal{D}_{A,C}$ et donc parallèles entre eux. On obtient $(\widehat{\mathcal{D}_{B,H'}, \mathcal{D}_Q}) = -(\widehat{\mathcal{D}_{B,H'}, \mathcal{D}_{H',P}})$, ce qui permet de trouver $\mathcal{D}_{H',P}$ quand $\mathcal{D}_Q$ est connu (c'est l'unique droite passant par H' telle que l'égalité des angles soit vérifiée). On pourra aussi décrire plus directement $\mathcal{D}_{H',P}$ comme l'image de $\mathcal{D}_Q$ par la réflexion orthogonale en $\mathcal{D}_2$. En tout cas P doit alors être le second point d'intersection de $\mathcal{D}_{H',P}$ et de Γ (si la droite est tangente à Γ, on prendra $P = H'$; dans ce cas on ne devrait pas appeler la droite $\mathcal{D}_{H',P}$, mais P correspondra néanmoins à $\mathcal{D}_Q$, ce qu'on peut justifier soit en refaisant la construction avec permutation des rôles des points A, B, C, soit en remarquant que les égalités de la question h restent valable quand $P = H'$ (et donc $Q_2 = H$), après remplacement de $\mathcal{D}_{Q_2,H}$ par $\mathcal{D}_Q$ et de $\mathcal{D}_{P,H'}$ par la tangente à Γ en P).*

Fin.