Examen 6L19 : Géométrie 16 mai 2008
9h00–12h00

Les documents et calculatrices sont **interdits**

Les résultats énoncés dans le cours ou dans les TD peuvent être utilisés ; citez dans ce cas le résultat précis.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes, mais dans chacune on peut se servir du résultat de la partie 1. En outre on peut utiliser dans chaque question les faits énoncés dans les questions précédentes de la même partie (même si on n'a pas réussi à les démontrer).

Dans toutes les parties on se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de direction E ; on rappelle qu'alors $\mathcal{S}(C, r)$ désigne un cercle de centre $C \in \mathcal{P}$, et rayon $r \in \mathbf{R}$. Utilisée sans mention de poids, la notation $\mathrm{bar}(A_1, \ldots, A_n)$ désigne l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_n$.

Barème indicatif 1 : 3pt ; 2 : 6pt ; 3 : 11 pt

1. Dans cette partie on étudie les différents cas qui peuvent se produire pour l'intersection de deux cercles distincts dans le plan. Soit $A, B \in \mathcal{P}$ deux points, et $r, s \in \mathbf{R}_{\geq 0}$; on considère les cercles $\Gamma = \mathcal{S}(A, r)$ et $\Gamma' = \mathcal{S}(B, s)$.

a. Supposons ici $A = B$ mais $r \neq s$. Pourquoi a-t-on $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$ dans ce cas ?

On suppose désormais $A \neq B$. Il est toujours possible que $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$, mais dans ce cas on n'a rien d'autre à ajouter. On suppose donc qu'on a un point $P \in \Gamma \cap \Gamma'$.

b. Si on a un autre point $Q \in \Gamma \cap \Gamma'$ (avec donc $Q \neq P$), montrer que $\mathcal{D}_{A,B}$ est la droite médiatrice de P et Q.

c. Conclure que $\Gamma \cap \Gamma'$ ne contient pas plus que deux points, et que $\Gamma \cap \Gamma' = \{P\}$ si et seulement si les points A, B et P sont alignés. Dans ce dernier cas les cercles Γ, Γ' sont dits *tangents* en P.

2. Dans cette partie on étudie les possibilités pour les longueurs des trois côtés d'un triangle dans le plan. On entendra ici (exceptionnellement) par «triangle» toute donnée de trois points dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$; dans le cas où ces points sont alignés, on dira que le triangle est «aplati».

a. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}$; on pose $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$. Montrer que $p \leq q + r$.

b. Montrer qu'on a même $|q - r| \leq p \leq q + r$, qu'on appelle les «inégalités triangulaires».

Ces inégalités sont équivalentes à $|r - p| \leq q \leq r + p$ ou encore à $|p - q| \leq r \leq p + q$ (on ne demande pas une démonstration), donc malgré les apparences elles sont symétriques par rapport à p, q, r.

c. On suppose $B \neq A \neq C$, et on fixe une orientation du plan $\mathcal{P}$. Soit $\phi \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Montrer que

$$\cos \phi = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}.$$

[Indication : on pourra choisir une base de E convenable et calculer en coordonnées.]

On fixe maintenant $p, q, r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ vérifiant les inégalités triangulaires ; on cherche à montrer que réciproquement il existe un triangle A, B, C tel que $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$. On choisit $A \in \mathcal{P}$ quelconque, et $B \in \mathcal{S}(A, p)$. Ainsi $d(A, B) = p$ est déjà vérifié.

d. On suppose $p, q > 0$. Déduire des inégalités triangulaires que

$$-1 \leq \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq} \leq +1,$$

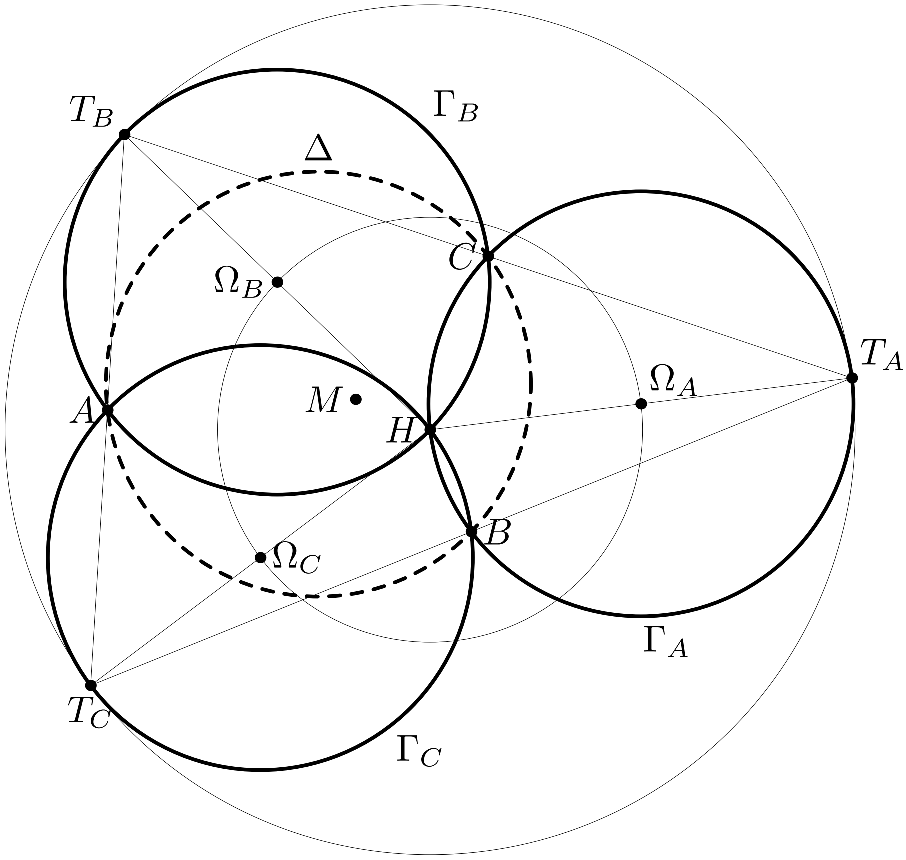
et montrer que ces dernières inégalités seront strictes $-1 < \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq} < 1$ si et seulement si on a les inégalités triangulaires strictes : $|q - r| < p < q + r$.

e. Montrer que si $|q - r| < p < q + r$, alors il existe précisément deux choix différents pour $C \in \mathcal{P}$ tels que A, B, C forme un triangle non aplati avec $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$.

continué au verso

3. Dans cet exercice on démontre le «théorème de Johnson» (ou «théorème de Clifford» dans le monde francophone), dont une formulation informelle est: si trois cercles du même rayon r passent par un point commun, alors il existe un quatrième cercle du même rayon r qui passe par leurs trois autres points d'intersection.

On fixe un point $H \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $r > 0$, et trois points distincts $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ du cercle $\mathcal{S}(H, r)$. On considère les trois autres cercles suivants, qui sont du même rayon: $\Gamma_A = \mathcal{S}(\Omega_A, r)$, $\Gamma_B = \mathcal{S}(\Omega_B, r)$, et $\Gamma_C = \mathcal{S}(\Omega_C, r)$. Comme les rôles des trois cercles sont parfaitement symétriques, tout ce qui sera montré pour un cercle, ou pour une paire de cercles, sera aussi vrai pour les autres cercles/paires de cercles; dans ces cas *ne répétez pas* la démonstration (trois fois).



a. Montrer que H est situé sur chacun des cercles Γ_A, Γ_B, et Γ_C.

b. Soit $A = H + \overrightarrow{H\Omega_B} + \overrightarrow{H\Omega_C}$. Montrer que $\Gamma_B \cap \Gamma_C = \{H, A\}$ (où il est possible que $A = H$).

On pose également $B = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_C} = \Omega_C + \overrightarrow{H\Omega_A}$ et $C = \Omega_A + \overrightarrow{H\Omega_B} = \Omega_B + \overrightarrow{H\Omega_A}$, de sorte que, de façon similaire, on ait $\Gamma_A \cap \Gamma_C = \{H, B\}$ et $\Gamma_A \cap \Gamma_B = \{H, C\}$.

c. Soit $h_{H,2} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'homothétie de centre H et de rapport 2. Montrer que le cercle $\mathcal{S}(H, 2r)$ est tangent à chacun des cercles Γ_A, Γ_B, et Γ_C (voir **1***c*), en leurs points diamétralement opposés à H, c'est-à-dire en $T_A = h_{H,2}(\Omega_A)$ respectivement en $T_B = h_{H,2}(\Omega_B)$, et en $T_C = h_{H,2}(\Omega_C)$.

d. Montrer que $C = \mathrm{bar}(T_A, T_B)$ (et on aura donc aussi $A = \mathrm{bar}(T_B, T_C)$ et $B = \mathrm{bar}(T_A, T_C)$).

e. Soit $M = \mathrm{bar}(T_A, T_B, T_C)$. Montrer que $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_A) = A$, $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_B) = B$, et $h_{M,-\frac{1}{2}}(T_C) = C$.

f. Montrer qu'il existe une homothétie de rapport -1 qui envoie le triangle $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ vers le triangle A, B, C (il n'est pas demandé de déterminer le centre de cette homothétie).

g. Conclure que les points A, B, C sont situés sur un cercle Δ du même rayon r que les cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C. C'est le théorème de Johnson.

h. Montrer que H est l'orthocentre du triangle A, B, C.

i. Montrer que le cercle Δ (c'est-à-dire le cercle circonscrit du triangle A, B, C) est l'image de Γ_A par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{B,C}$ (il est aussi l'image de Γ_B par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{A,C}$, et l'image de Γ_C par la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}_{A,B}$).

Fin.