Corrigé Contrôle continu 6L19 : Géométrie 5 mars 2008
9h00–11h00

1. Dans un des TD on a établi le théorème de Ceva sous la forme suivante: si A, B, C est une triangle dans un espace affine $\mathcal{A}$, et $P \in \mathcal{A}$ un autre point tel que les droites $\mathcal{D}_{A,P}$, $\mathcal{D}_{B,P}$ et $\mathcal{D}_{C,P}$ coupent chacune le côté opposé du triangle, disons $\mathcal{D}_{A,P} \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{a\}$, $\mathcal{D}_{B,P} \cap \mathcal{D}_{A,C} = \{b\}$ et $\mathcal{D}_{C,P} \cap \mathcal{D}_{A,B} = \{c\}$, et si $\{a, b, c\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$, alors le produit des rapports $\overrightarrow{Ba}/\overrightarrow{aC}$, $\overrightarrow{Cb}/\overrightarrow{bA}$, et $\overrightarrow{Ac}/\overrightarrow{cB}$, est 1.

On propose ici de démontrer, par un calcul en coordonnées, une version un peu plus précise du même théorème. Soit donc $\mathcal{A}$ un plan affine, et $\mathcal{S} = (A, B, C)$ trois points non alignés de $\mathcal{A}$, dont on se servira comme repère affine. Toute droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ peut être décrite (de façon non unique) comme $\mathcal{D} = \{\, (x, y, z)_\mathcal{S} \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \,\}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in K$, pas tous égaux; on utilisera la notation $\mathcal{D} = [\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ pour cette droite. Soit alors $\mathcal{D}_1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]_\mathcal{S}$, $\mathcal{D}_2 = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]_\mathcal{S}$, et $\mathcal{D}_3 = [\alpha_3, \beta_3, \gamma_3]_\mathcal{S}$ trois droites affines, dont on suppose qu'aucune des $\mathcal{D}_i$ n'est parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$, ni à $\mathcal{D}_{B,C}$ ni à $\mathcal{D}_{A,C}$. Il existe alors des points $a, b, c \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_{B,C} = \{a\}$, $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_{A,C} = \{b\}$ et $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{D}_{A,B} = \{c\}$. La version du théorème de Ceva considéré s'énonce ainsi: Si $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$ et $C \in \mathcal{D}_3$, alors $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{Ba}}{\overrightarrow{aC}} \times \frac{\overrightarrow{Cb}}{\overrightarrow{bA}} \times \frac{\overrightarrow{Ac}}{\overrightarrow{cB}} = 1. \qquad (1)$$

a. Exprimer les conditions $A \in \mathcal{D}_1$, $B \in \mathcal{D}_2$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{D}_3$ en termes des paramètres $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (pour $i = 1, 2, 3$). On supposera désormais que ces conditions sont satisfaites.

$\surd$ *On a $A = (1, 0, 0)_\mathcal{S}$, $B = (0, 1, 0)_\mathcal{S}$ et $C = (0, 0, 1)_\mathcal{S}$, d'où les conditions s'expriment respectivement comme $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ et $\gamma_3 = 0$.*

b. Donner une équation qui exprime la condition que $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes ou parallèles en termes de ces paramètres.

$\surd$ *La condition est que le déterminant des coefficients des droites soit nul. Prenant en compte les équations du point précédent, cela donne*

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne $\beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 = 0$.

Beaucoup ont oublié que $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 0$, ce qui complique les expressions inutilement.

c. Calculer les coordonnées barycentriques des points a, b, c.

$\surd$ *Le point $a = (x, y, z)_\mathcal{S}$ doit vérifier l'équation $x = 0$ qui décrit la droite $\mathcal{D}_{B,C} = [1, 0, 0]_\mathcal{S}$, ainsi que l'équation $\beta_1 y + \gamma_1 z = 0$ qui caractérise les points de $\mathcal{D}_1 = [0, \beta_1, \gamma_1]_\mathcal{S}$, et finalement l'équation $x + y + z = 1$ valable pour tout triple de coordonnées barycentriques. En résolvant ce système on trouve $a = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(0, -\gamma_1, \beta_1)_\mathcal{S}$. (Comme il était donné que $\mathcal{D}_1$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$, une solution pour a existe ce qui garantit que $\beta_1 - \gamma_1 \neq 0$.) De façon similaire on trouve $b = \frac{1}{\gamma_2 - \alpha_2}(\gamma_2, 0, -\alpha_2)_\mathcal{S}$ et $c = \frac{1}{\alpha_3 - \beta_3}(-\beta_3, \alpha_3, 0)_\mathcal{S}$.*

d. Exprimer finalement l'équation (1) en termes des paramètres, et montrer qu'elle est équivalente à la condition trouvée dans le point b ci-dessus.

$\surd$ *Comme $a = \operatorname{bar}((B, -\gamma_1), (C, \beta_1))$ d'après ses coordonnées barycentriques, on a $\overrightarrow{Ba}/\overrightarrow{aC} = \frac{\beta_1}{-\gamma_1}$ (on a $a \notin \{B, C\}$, car sinon $\mathcal{D}_1$ serait égal à $\mathcal{D}_{A,B}$ ou à $\mathcal{D}_{A,C}$, donc il s'agit d'un rapport entre deux vecteurs proportionnels non nuls). De façon similaire $\overrightarrow{Cb}/\overrightarrow{bA} = \frac{\gamma_2}{-\alpha_2}$ et $\overrightarrow{Ac}/\overrightarrow{cB} = \frac{\alpha_3}{-\beta_3}$. L'équation (1) s'écrit alors*

$$\frac{\beta_1}{-\gamma_1} \times \frac{\gamma_2}{-\alpha_2} \times \frac{\alpha_3}{-\beta_3} = 1, \qquad \text{ou de façon équivalente} \qquad \beta_1\gamma_2\alpha_3 = -\gamma_1\alpha_2\beta_3,$$

ce qui est bien équivalent à la condition trouvée dans le point a.

2. Soit $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux hyperplans de $\mathcal{A}$, et $\overrightarrow{\mathcal{D}} \subset E$ une droite vectorielle (un sous-espace vectoriel de dimension 1) qui n'est contenue ni dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{H}_1}$ de $\mathcal{H}_1$, ni dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{H}_2}$ de $\mathcal{H}_2$.

a. Montrer que pour tout point $A \in \mathcal{H}_1$ il existe un point unique $A' \in (A + \overrightarrow{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_2$, et que l'application $f : A \mapsto A'$ ainsi définie est une bijection $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$.

$\surd$ *Comme $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est une droite vectorielle non contenue dans l'hyperplan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{H}_2}$, les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E, et par conséquent les sous-espaces affines $A+\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_2$ de $\mathcal{A}$ sont supplémentaires aussi. Alors par un résultat du cours, ces deux sous-espaces affines se coupent en un seul point, ce qui définit A'. On peut également, étant donné A', retrouver A par la condition $A \in (A' + \overrightarrow{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_1$ (qui est vérifiée car $A' + \overrightarrow{\mathcal{D}} = A + \overrightarrow{\mathcal{D}}$), car $(A' + \overrightarrow{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_1$ est un singleton par un raisonnement entièrement similaire (mais basé sur le fait que $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ n'est pas contenu dans $\overrightarrow{\mathcal{H}_1}$); cela montre que f est injectif. De plus cette construction de A marche quel que soit $A' \in \mathcal{H}_2$ (sans avoir besoin de savoir au préalable que A' est l'image par f d'un point de $\mathcal{H}_1$), et on aura $A' = f(A)$, donc f est aussi surjectif. On a montré que f est une bijection $A \mapsto A'$.*

Il ne faut pas confondre l'unicité de A' (qui montre que f est bien défini) avec l'unicité du point $A \in \mathcal{H}_1$ qui a A' comme image (qui montre l'injectivité de f). Aussi pour la surjectivité il faut (re)commencer avec $A' \in \mathcal{H}_2$ sans utiliser l'existence de A tel que $f(A) = A'$, et ensuite trouver (construire) un tel A.

b. Soit A, B, C, D quatre points distincts de $\mathcal{H}_1$. On pose $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, et $D' = f(D)$. Montrer que les droites $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ dans $\mathcal{H}_1$ se coupent si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{C',D'}$ dans $\mathcal{H}_2$ se coupent.

$\surd$ *L'argument le plus facile utilise que f est un isomorphisme affine: la formule définissant f est celle de la projection $\mathcal{A} \to \mathcal{H}_2$ parallèle à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, restreinte à $\mathcal{H}_1$, qui est un application affine, et comme c'est aussi une bijection, c'est un isomorphisme affine. Alors trois points de $\mathcal{H}_1$ sont alignés si et seulement si leurs images par f dans $\mathcal{H}_2$ sont alignés. Par conséquent $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ se coupent dans $\mathcal{H}_1$ (c'est-à-dire il existe un point de $\mathcal{H}_1$ aligné à la fois avec A et B et avec C et D) si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{C',D'}$ se coupent dans $\mathcal{H}_2$ (leur point d'intersection sera l'image par f du point d'intersection de $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$).*
Un argument sans utiliser la propriété d'être une application affine est également possible. Comme $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ n'est pas contenu dans $\overrightarrow{\mathcal{H}_1}$, on a un plan affine $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\mathcal{D}})$ dont l'intersection avec $\mathcal{H}_1$ est $\mathcal{D}_{A,B}$, et dont l'intersection avec $\mathcal{H}_2$ est $\mathcal{D}_{A',B'}$ (car il contient A' et B', sons être entièrement contenu dans $\mathcal{H}_2$). La situation pour C et D est analogue. Les droites $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ se coupent si et seulement si les plans $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\mathcal{D}})$ et $C + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{\mathcal{D}})$ se coupent (la partie «seulement si» est évident, et si les deux plans se coupent en un point P, le point d'intersection de $P + \overrightarrow{\mathcal{D}}$ avec $\mathcal{H}_1$ donne un point commun de $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$), est cela arrive si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{C',D'}$ se coupent, par le même raisonnement.

Nota bene: parmi les erreurs commises dans ce point figurent notamment: de supposer que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont parallèles, que f est une translation ou que $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un vecteur (au lieu d'une droite vectorielle). Un moindre erreur consiste à confondre les notions de "hyperplan' et de "plan" (autrement dit de supposer que $\dim \mathcal{A} = 3$), et donc d'affirmer que $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{C,D}$ se coupent si elles ne sont pas parallèles.

Fin.