Corrigé Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire mardi 10 janvier 2012
14h–17h

On rappelle que pour une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps K, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme unitaire $\det(XI_n - A)$.

1. *a.* Soit $P \in \mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible, et calculer son inverse.

$\surd$ *Par des opérations sur les lignes on transforme P en forme triangulaire*

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est visiblement inversible. On a multiplié à gauche par une matrice triangulaire inférieure, et encore une multiplication à gauche par une matrice triangulaire supérieure rendra la matrice diagonale. En combinant on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b. On considère les deux polynômes $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, et $X - 2$, dans $\mathbf{R}[X]$. Trouver des polynômes S et T dans $\mathbf{R}[X]$ tels que l'égalité $S(X-1)^2 + T(X-2) = 1$ soit vérifiée.

$\surd$ *Comme $X(X-2) = X^2 - 2X$, on voit que $S = 1$ et $T = -X$ conviennent (c'était trop facile !).*

2. Soit $A \in \mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbf{R}^3$.

a. Montrer que le polynôme caractéristique χ de u est de la forme $\chi(X) = (X-a)^2(X-b)$, expliciter a et b.

$\surd$

$$\begin{aligned} \chi(X) &= X^3 - (3+3-2)X^2 + (\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix})X - \det A \\ &= X^3 - 4X^2 + 5X - 2 \end{aligned}$$

On voit que $\chi(1) = 0$ et en effet $\chi(X) = (X-1)(X^2-3X+2) = (X-1)^2(X-2)$, comme annoncé avec $a = 1$ et $b = 2$. Il y a bien évidemment plein d'autres méthodes pour calculer le polynôme caractéristique, notamment on pourra faire des opérations sur les lignes ou colonnes pour créer certains coefficients nuls, avant de prendre le déterminant de la matrice.

b. Déterminer le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

$\surd$ *Le polynôme minimal a pour racines les valeurs propres $a = 1$ et $b = 2$. Il peut alors être soit $(X-1)(X-2)$, soit $\chi(X) = (X-1)^2(X-2)$ (car il divise $\chi(X)$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton). On vérifie que $(A - \mathrm{id}_3)(A - 2\,\mathrm{id}_3) \neq 0$ (son premier coefficient est -2), donc le polynôme minimal est égal à $\chi(X)$. Comme celui-ci n'est pas à racines simples, u n'est pas diagonalisable. Une autre approche possible est de calculer $v, u(v), u^2(v)$ pour un certain vecteur v, et de constater qu'ils sont linéairement indépendants, ce qui exclut la possibilité d'un polynôme minimal de degré 2. Par exemple pour $v = (1, 0, -3)^\top$ on trouve $u(v) = (0, 1, 0)^\top$ et $u^2(v) = (-1, 3, 4)^\top$ qui sont visiblement linéairement indépendants. En calculant encore $u^3(v) = (-2, 7, 10)^\top$ on peut vérifier la relation $u^3(v) - 4u^2(v) + 5u(v) - 2v = \vec{0}$, ce qui confirme qu'on ne se soit pas trompé dans la détermination de $\chi(X)$, ou du moins qu'on ait $\chi(u)(v) = \vec{0}$ pour ce vecteur v (mais comme on en déduit facilement que également $\chi(u)(u(v)) = \vec{0}$ et $\chi(u)(u^2(v)) = \vec{0}$ on aura vérifié que $\chi(u) = 0$).*

On note $C_a = \mathrm{Ker}((u - aI_3)^2)$, $V_a = \mathrm{Ker}(u - aI_3)$, et $V_b = \mathrm{Ker}(u - bI_3)$.

c. Expliquer pourquoi on a $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$, et $V_a \subseteq C_a$. Donner la dimension de C_a, V_a et V_b.

$\surd$ *La décomposition $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$ est celle en espaces caractéristiques pour les valeurs propres $a = 1$ et $b = 2$, car $(X-1)^2 \times (X-2)$ est une décomposition du polynôme minimal en deux facteurs premiers entre eux, chacun puissance de $X - \lambda$ pour une valeur propre λ. Cette décomposition est (aussi) une instance du théorème de décomposition (ou lemme) des noyaux, car le polynôme $(X-1)^2(X-2)$ évalué en u est $0 \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$, et ses diviseurs $(X-1)^2$ et $X-2$ sont premiers entre eux, donc $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}((u - aI_3)^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - bI_3)$. On a $V_a \subseteq C_a$ car un vecteur annulé par $u - bI_3$ le restera si l'on applique $u - bI_3$ une deuxième fois. Les espaces propres V_a et V_b sont de dimension ≥ 1, et en vue de la multiplicité 2 de la valeur propre $a = 1$ comme racine du polynôme minimal on a $V_a \neq C_a$; du coup $\dim(V_a) = \dim(V_b) = 1$ et $\dim(C_a) = 2$.*

d. D'après la question précédente il existe des vecteurs dans $C_a - V_a$. Montrer que si $\varepsilon_2 \in C_a - V_a$ et $\varepsilon_3 \in V_b - \{0\}$, et si l'on pose $\varepsilon_1 = u(\varepsilon_2) - a\varepsilon_2$, alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

$\surd$ *D'après le choix de ε_2, le vecteur ε_1 n'est pas nul, et comme il est lui même annulé par $u - I_3$, il est dans V_a. En particulier ε_2 n'est pas un multiple scalaire de ε_1, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est donc une base de C_a, et (ε_3) est une base de V_b. La somme directe de la question précédente permet de conclure que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.*

e. Soit P la matrice de passage $M_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Que vaut $P^{-1}AP$ (sans calcul explicite)?

$\surd$ *Les colonnes de P sont respectivement les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (exprimés dans la base canonique), et la multiplication par P^{-1} envoie un vecteur $v \in \mathbf{R}^3$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique) vers les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. Par conséquent les colonnes de $P^{-1}AP$ sont respectivement les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $u(\varepsilon_1)$, $u(\varepsilon_2)$, et $u(\varepsilon_3)$. D'après la description de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ on obtient*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f. Les descriptions ci-dessus permettent de choisir

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Que vaut P avec ces choix? Retrouver $P^{-1}AP$ avec un calcul explicite.

$\surd$ *On a maintenant $\varepsilon_1 = u(\varepsilon_2) - a\varepsilon_2 = (2, 1, -2)^\top - (1, 1, 0)^\top = (1, 0, -2)^\top$. Comme indiqué dans la question précédente on a donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et en se servant de la question **1***a, on trouve*

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

g. Soient $S, T \in \mathbf{R}[X]$ comme dans la question *b* de l'exercice **1**, montrer que $\pi_2 = S(u) \circ (u - aI_3)^2$ est la projection de $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$ sur le second facteur V_b, et que $\pi_1 = T(u) \circ (u - bI_3)$ est la projection de $\mathbf{R}^3 = C_a \oplus V_b$ sur le premier facteur C_a. Cela veut dire que si $x \in \mathbf{R}^3$ est écrit $x = c_a + v_b$ avec $c_a \in C_a$ et $v_b \in V_b$ (ce qui est possible de façon unique), alors on aura $\pi_2(x) = v_b$ et $\pi_1(x) = c_a$. Il suffit pour π_2 de montrer séparément que $\pi_2(c_a) = \vec{0}$ pour tout $c_a \in C_a$ et que $\pi_2(v_b) = v_b$ pour tout $v_b \in V_b$; une remarque similaire s'applique à π_1.

$\surd$ *Par définition de C_a on a $(u - aI_3)^2(c_a) = \vec{0}$ pour tout $c_a \in C_a$, et donc $\pi_2(c_a) = S(u)(\vec{0}) = \vec{0}$. Pour montrer que $\pi_2(v_b) = v_b$ pour tout $v_b \in V_b$, on se sert de la relation $S(X-1)^2 + T(X-2) = 1$ qui implique $S(X-1)^2 \equiv 1 \pmod{X-2}$. Cela veut dire pour un vecteur annulé par $u - 2I_3$, autrement dit pour $v_b \in V_b$, que $S(u) \circ (u - I_3)^2$ opère sur ce vecteur de la même manière que 1, c'est-à-dire que l'identité. On trouve donc $\pi_2(v_b) = 1(v_b) = v_b$. Pour π_1 il est semblable : $\pi_1(v_b) = \vec{0}$ car déjà $(u - bI_3)(v_b) = \vec{0}$, et $\pi_1(c_a) = 1(c_a) = c_a$ car $T(X-2) \equiv 1 \pmod{(X-1)^2}$. On peut évidemment retrouver ces propriétés par un calcul explicite en utilisant les valeurs $S = 1$ et $T = -X$. Mais tout ce qui importe vraiment dans cette vérification est la relation $S(X-1)^2 + T(X-2) = 1$.*

3. Soit $c \in \mathbf{C}$ une constante, et ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

a. Soit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$$

le premier vecteur de la base canonique. Montrer que les trois vecteurs v, $\phi(v)$, $\phi^2(v)$ forment une famille libre (quel que soit c).

$\surd$ *Un calcul direct montre que $\phi(v)$ et $\phi^2(v)$ sont respectivement les second et troisième vecteurs de la base canonique. On retrouve donc la base canonique qui est bien évidemment une famille libre. (Là aussi, c'était trop facile !)*

b. En déduire que si $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme non nul tel que l'évaluation $P(\phi)$ de P en ϕ est (l'endomorphisme) nul, alors $\deg(P) \geq 3$.

$\surd$ *Par l'absurde : si $P = aX^2 + bX + c$ vérifie $P(\phi) = 0 \in \operatorname{End}(\mathbf{C}^3)$ on aura certainement $a\phi^2(v) + b\phi(v) + cv = \vec{0}$, et donc $a = b = c$ (contredisant $P \neq 0$) d'après l'indépendance de v, $\phi(v)$, $\phi^2(v)$.*

c. Trouver un polynôme unitaire P de degré 3 tel que $P(\phi)(v) = 0 \in \mathbf{C}^3$, et montrer que P est le polynôme minimal de ϕ.

$\surd$ *On a $\phi^3(v) = -v + c\phi(v) + c\phi^2(v)$ donc $P = X^3 - cX^2 - cX + 1$ convient. De $P(\phi)(v) = 0$ on déduit $P(\phi)(\phi^i(v)) = (PX^i)(\phi)(v) = 0$ pour $i = 1, 2$, et comme v, $\phi(v)$, et $\phi^2(v)$ engendrent $\mathbf{C}^3$ cela montre que $P(\phi) = 0 \in \operatorname{End}(\mathbf{C}^3)$, et l'évaluation en ϕ annule P. Il est aussi unitaire et de degré minimal pour être annulé par cette évaluation, donc il est le polynôme minimal de ϕ.*

d. Montrer que -1 est une valeur propre de ϕ, quel que soit c, et trouver (c'est-à-dire l'exprimer en fonction de la constante c) un vecteur propre pour cette valeur propre $\lambda = -1$.

$\surd$ *On a $P(-1) = -1 - c + c + 1 = 0$ donc -1 est racine du polynôme minimal, et donc valeur propre de ϕ. L'espace propre pour cette valeur propre est $\operatorname{Ker}(\phi + \mathrm{id})$, et on peut vérifier facilement que $(-1, c+1, -1)^\top$ est un vecteur non nul dans ce noyau (tout comme $(1, -c-1, 1)^\top$).*

e. Dans cette question on fixe $c = 3$. Montrer que ϕ est alors diagonalisable, et trouver une base de $\mathbf{C}^3$ constituée de vecteurs propres.

$\surd$ *On a $X^3 - 3X^2 - 3X + 1 = (X+1)(X^2 - 4X + 1)$ et le polynôme quadratique se factorise $X^2 - 4X + 1 = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3})$. Le polynôme minimal est donc scindé avec 3 racines distinctes $-1, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$, et ϕ est donc diagonalisable. Après calcul du noyau de $\lambda\,\mathrm{id} - \phi$ pour $\lambda \in \{-1, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$ sous forme matricielle, on trouve les vecteurs propres suivants :*

$$-1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2 + \sqrt{3} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2 - \sqrt{3} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

f. Déterminer l'ensemble de valeurs de la constante c pour lesquelles ϕ *n'est pas* diagonalisable.

$\surd$ *On a $X^3 - cX^2 - cX + 1 = (X+1)(X^2 - (c+1)X + 1)$. Pour que ce polynôme soit à racines simples, il faut que $X^2 - (c+1)X + 1$ le soit, et que ce polynôme n'ait pas -1 comme racine. Le discriminant de $X^2 - (c+1)X + 1$ est $(c+1)^2 - 4 = c^2 + 2c - 3 = (c+3)(c-1)$, expression qui s'annule pour $c = -3$ et pour $c = 1$. L'évaluation de $X^2 - (c+1)X + 1$ en $X = -1$ est $c + 3$, ce qui s'annule en $c = -3$. Par conséquent $(X+1)(X^2 - (c+1)X + 1)$ a une racine double pour $c = 1$ et une racine triple (égale à -1) pour $c = -3$. Ce sont les valeurs pour lesquelles ϕ n'est pas diagonalisable ; pour toute autre valeur de c l'endomorphisme ϕ est diagonalisable (car le polynôme quadratique $X^2 - (c+1)X + 1$ à discriminant non nul possède deux racines distinctes dans $\mathbf{C}$, et on a vérifié que dans ces cas ils ne sont pas confondus avec la racine -1).*

g. Pour toutes les valeurs particulières de c trouvées dans la question précédente (où donc ϕ n'est pas diagonalisable), déterminer les valeurs propres λ de ϕ, ainsi que les sous-espaces caractéristiques associés (on rappelle que le sous-espace caractéristique pour λ est $\operatorname{Ker}((\lambda \operatorname{id} - \phi)^m)$, où l'entier m est suffisamment grand ; la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal, celle de λ comme racine du polynôme caractéristique, ou encore la dimension de l'espace vectoriel (ici $m = 3$) sont tous les trois garantis d'être suffisamment grand.)

$\surd$ *On a déjà constaté que pour $c = -3$ on n'a que la valeur propre $\lambda = -1$, qui a multiplicité 3 comme racine du polynôme minimal. Pour $c = 1$ le polynôme $X^2 - (c+1)X + 1 = X^2 - 2X + 1$ a une racine double $\lambda = +1$, qui est donc une seconde valeur propre de ϕ (après $\lambda = -1$). Pour $c = -3$ il n'y a qu'un seul sous-espace caractéristique, forcément égal à $\mathbf{C}^3$ tout entier. Pour $c = 1$ l'espace caractéristique pour $\lambda = -1$ est égal à l'espace propre (car la multiplicité de $\lambda = -1$ comme racine du polynôme minimal est alors 1), qui est engendré par le vecteur $(-1, c+1, -1)^\top = (-1, 2, -1)^\top$, donc c'est $\operatorname{Vect}((-1, 2, -1)^\top)$. Dans ce cas l'espace caractéristique pour $\lambda = +1$ est $\operatorname{Ker}((\operatorname{id} - \phi)^2)$, donc c'est l'ensemble de vecteurs annulés par multiplication par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{et c'est l'espace} \quad \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Des espaces que l'on n'a pas demandés, mais qui sont intéressants quand même, sont pour $c = -3$ l'espace intermédiaire $\operatorname{Ker}((-\operatorname{id} - \phi)^2)$, et pour $c = 1$ l'espace propre pour $\lambda = +1$, à savoir $\operatorname{Ker}(\operatorname{id} - \phi)$. Le premier, $\operatorname{Ker}((-\operatorname{id} - \phi)^2)$ pour $c = -3$, est l'ensemble de vecteurs annulés par multiplication par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{et c'est l'espace} \quad \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

et le second $\operatorname{Ker}(\operatorname{id} - \phi)$ pour $c = 1$, est l'ensemble de vecteurs annulés par multiplication par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{et c'est l'espace} \quad \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Par une étrange coïncidence, le premier sous-espace est le même que le sous-espace caractéristique pour $\lambda = +1$ quand $c = 1$. Ceci dit, dans ce premier cas l'espace propre (pour $\lambda = -1$) qu'il contient est $\operatorname{Vect}((-1, -2, -1)^\top) = \operatorname{Vect}((1, 2, 1)^\top)$, et non pas $\operatorname{Vect}((1, 0, -1)^\top)$ comme dans l'autre cas.

Fin.