Corrigé Contrôle continu 3L05 : Algèbre Multilinéaire jeudi 3 novembre 2010
8h15–11h15

1. Soir $E = C^\infty(\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et F son sous-espace engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto e^x$, $f_1 : x \mapsto xe^x$, et $f_2 : x \mapsto x^2e^x$.

a. Montrer que f_0, f_1, f_2 forment une famille libre. Quelle est $\dim(F)$?

$\surd$ *Si $a, b, c \in \mathbf{R}$ sont tels que $af_0 + bf_1 + cf_2$ soit la fonction nulle, cela veut dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $(a+bx+cx^2)e^x = 0$, et cela implique $a = b = c = 0$ car le facteur e^x ne s'annule nulle part, et il est bien connu qu'une fonction polynomiale $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est nulle que si le polynôme est nul (dans ce cas concret on pourrait éventuellement évaluer en trois valeurs spécifiques de x et résoudre a, b, c à partir du système d'équations obtenu, pour trouver que nécessairement $a = b = c = 0$). Comme $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, on a $\dim(F) = 3$.*

b. Soit $\delta : E \to E$ l'application qui à f associe la fonction $x \mapsto (x+1)(f'(x) - f(x))$. Vérifier que δ est une application linéaire.

$\surd$ *Pour une combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ de $f, g \in E$ on a*

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha f + \beta g)(x) &= (x+1)((\alpha f + \beta g)'(x) - (\alpha f + \beta g)(x)) \\
&= (x+1)(\alpha(f'(x) - f(x)) + \beta(g'(x) - g(x))) \\
&= \alpha(x+1)(f'(x) - f(x)) + \beta(x+1)(g'(x) - g(x)) \\
&= (\alpha\delta(f) + \beta\delta(g))(x),
\end{aligned}$$

donc $\delta(\alpha f + \beta g) = \alpha\delta(f) + \beta\delta(g)$, ce qui montre que δ est une application linéaire.

c. Calculer $\delta(f_0)$, $\delta(f_1)$ et $\delta(f_2)$, et conclure que le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ est δ-stable.

$\surd$

$$\begin{aligned}
&\delta(f_0) : x \mapsto (x+1)(e^x - e^x) = 0 \quad \textit{donc} \quad \delta(f_0) = 0 \quad \textit{(la fonction nulle)}, \\
&\delta(f_1) : x \mapsto (x+1)((x+1)e^x - xe^x) = (x+1)e^x \quad \textit{donc} \quad \delta(f_1) = f_1 + f_0, \\
&\delta(f_2) : x \mapsto (x+1)((x^2+2x)e^x - x^2e^x) = (x+1)2xe^x = 2x^2e^x + 2xe^x \\
&\qquad \textit{donc} \quad \delta(f_2) = 2f_2 + 2f_1.
\end{aligned}$$

Visiblement les images de ces trois générateurs de F sont dans F, ce qui prouve que F est δ-stable.

On note ϕ l'endomorphisme de l'espace vectoriel F obtenu par restriction de δ.

d. Trouver la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B} = [f_0, f_1, f_2]$ de F.

$\surd$ *Le calculs du point précédent montrent que*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

e. Montrer que 0, 1 et 2 sont des valeurs propres de ϕ, et trouver des vecteurs propres correspondants. Y a-t il d'autres valeurs propres ?

$\surd$ *En posant $f = xf_0 + yf_1 + zf_2$, les équations $\delta(f) = 0$, $\delta(f) = f$ et $\delta(f) = 2f$ pour les vecteurs propres associés à ces trois valeurs sont des équations linéaires, dont chacune possède de solutions non nulles. Pour la première on trouve $y = z = 0$ et donc une solution $f = f_0$, pour la seconde on trouve $x = y$ et $z = 0$ donc une solution $f = f_0 + f_1$, et pour la troisième on trouve $2x = y = 2z$ et donc une solution $f = f_0 + 2f_1 + f_2$. Ce sont des vecteurs propres, ce qui montre que 0, 1 et 2 sont bien des valeurs propres de ϕ. En tant que vecteurs propres pour des valeurs propres différentes ils sont linéairement indépendantes, donc une base de F car $\dim(F) = 3$. Comme aucun vecteur n'est linéairement indépendant de ces trois vecteurs, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres.*

f. Spécifier une base de diagonalisation de ϕ, et la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ et cette base de diagonalisation.

$\surd$ *Le triplet de vecteurs $[f_0, f_0 + f_1, f_0 + 2f_1 + f_2]$ trouvé forment une base de diagonalisation, et la matrice de passage est celle dont les colonnes contiennent leurs coefficients dans la base $\mathcal{B}$, c'est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g. Trouver la matrice inverse P^{-1} (il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure, ce qui rend son calcul plus facile). Vérifier qu'on ait $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale convenable.

$\surd$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matrice diagonale avec les valeurs propres comme coefficients diagonaux, de sorte que

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$$

h. Exprimer la puissance M^n pour $n \in \mathbf{N}^*$ explicitement en fonction de n (c'est-à-dire donner des expressions en n pour tous ses coefficients).

$\surd$ *On a* $M^n = PD^nP^{-1}$, *où* D^n *est la matrice diagonale avec coefficients diagonaux* 0^n, 1^n, 2^n, *donc*

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^n & 1-0^n & 2^n-2+0^n \\ 0 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

ce qui pour $n > 0$ *se simplifie à*

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n-2 \\ 0 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. Soit E l'ensemble des suites infinies $a = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec $a_i \in \mathbf{R}$ et $a_{i+2} = a_{i+1} - 2a_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. On considère E comme sous-ensemble du $\mathbf{R}$-espace vectoriel F des suites infinies à termes dans $\mathbf{R}$, avec l'addition et la multiplication scalaire définies de la façon habituelle (terme par terme). Il est clair qu'une suite $a \in E$ est entièrement déterminée par ses deux premiers termes a_0, a_1, en utilisant la relation de récurrence pour déterminer successivement les autres termes.

a. Montrer que si $a, b \in E$ et $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ alors $\mu a + \nu b \in E$, et en déduire que E est un sous-espace vectoriel de F.

$\surd$ *On a* $(\mu a+\nu b)_{i+2} = \mu a_{i+2} + \nu b_{i+2} = 3\mu a_i + 2\mu a_{i+1} + 3\nu b_i + 2\nu b_{i+1} = 3(\mu a+\nu b)_i + 2(\mu a+\nu b)_{i+1}$, *donc toute combinaison* $\mathbf{R}$*-linéaire d'éléments de* E *est encore dans* E, *qui est ainsi un* $\mathbf{R}$*-sous-espace de* S, *et donc un* $\mathbf{R}$*-espace.*

Une conséquence de cette propriété est que, pour vérifier qu'une suite s de E s'écrit comme combinaison linéaire $\mu a + \nu b$ de $a, b \in E$, il suffit de vérifier que les deux premiers termes de s et de $\mu a + \nu b$ sont les mêmes, car $\mu a + \nu b$ est déterminé, en tant que élément de E, par ces deux termes.

b. Montrer que les suites $\mathbf{b}_0 \in E$ aux termes initiaux $1, 0$, et $\mathbf{b}_1 \in E$ aux termes initiaux $0, 1$, forment une base de E.

$\surd$ *Pour* $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *la suite* $a = \mu\mathbf{b}_0 + \nu\mathbf{b}_1 \in E$ *a pour termes initiaux* $a_0 = \mu$ *et* $a_1 = \nu$, *et c'est l'unique suite de* E *qui commence avec ces termes. Par conséquent toute suite de* E *s'écrit d'une façon unique comme une telle combinaison linéaire, et* $[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1]$ *est une base de* E.

c. Calculer les 10 premiers termes de la suite $\mathbf{b}_0$, ainsi que ceux de la suite $\mathbf{b}_1$.

$\surd$ $\mathbf{b}_0 = (1, 0, -2, -2, 2, 6, 2, -10, -14, 6, 34, \ldots)$ *et* $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1, -1, -3, -1, 5, 7, -3, -17, -11, \ldots)$.

d. Soit D l'opération de décalage $(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i \in \mathbf{N}}$, définie sur E (elle consiste à supprimer le premier terme de la suite, et chaque terme restant prend la place du terme précédent). Montrer que D est un endomorphisme de E.

$\surd$ *Le fait que* $D(\mu a + \nu b) = \mu D(a) + \nu D(b)$ *relève d'une simple vérification. Pour voir que* $a \in E$ *entraîne* $D(a) \in E$ *il suffit de calculer* $D(a)_{i+2} = a_{i+3} = 3a_{i+1} + 2a_{i+2} = 3D(a)_i + 2D(a)_{i+1}$.

e. Montrer que vecteurs propres éventuels v de D avec valeur propre λ sont nécessairement des suites géométriques de raison λ, c'est-à-dire de terme général $v_n = c\lambda^n$ avec $c \neq 0$ constant.

$\surd$ *Si* $D(a) = \lambda a$ *pour* $\lambda \in \mathbf{R}$, *alors* $a_{i+1} = \lambda a_i$ *pour tout* $i \in \mathbf{N}$, *ce qui veut dire que* a *est une suite géométrique de raison* λ. *On aura* $v_n = c\lambda^n$ *où* $c = a_0$ *est le terme initial, non-nul car* $a \neq 0$.

f. Formuler une équation en $\lambda \in \mathbf{R}$ que doivent vérifier les valeurs propres λ de D, et en déduire que de telles valeurs propres n'existent pas. Montrer que pour le $\mathbf{C}$-espace vectoriel E' des suites à termes *complexes* qui vérifient la même relation de récurrence, l'endomorphisme avec la même définition que D possède deux valeurs propres complexes, qu'on spécifiera.

$\surd$ *Pour que la suite géométrique* $(c\lambda^i)_{i\in\mathbf{N}}$ *avec* $c \in \mathbf{R}^*$ *appartienne à* E *il faut que* $c\lambda^2 = c\lambda - 2c$ *(relation pour le terme à l'indice 2), et comme* $c \neq 0$*, il faut donc que* $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$*. Mais le polynôme* $P = X^2 - X + 2$ *est de discriminant* $1-8 = -7 < 0$*, donc il n'existe pas de valeurs propres (dans* $\mathbf{R}$*). Mais en remplaçant le corps* $\mathbf{R}$ *par* $\mathbf{C}$ *on trouvera des racines et donc une factorisation de* P : $X^2 - X + 2 = \big(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i})\big)\big(X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i})\big)$*. Donc pour le problème correspondant avec* $K = \mathbf{C}$ *on a deux valeurs propres, les racines* $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}$ *et* $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}$.

g. Trouver des vecteurs propres (dans E') pour les valeurs propres trouvées dans la question précédente.

$\surd$ *Ce sont les suites géométriques* $v = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $w = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

h. Soit $a \in E$ la suite de termes initiaux $a_0 = 1$, $a_1 = 1$. Trouver à l'aide de la question précédente une expression pour le terme général de a.

$\surd$ *On cherche à écrire* $a = \mu v + \nu w$*, et il suffit d'obtenir l'égalité pour les deux premiers termes. Cela donne les équations* $\mu + \nu = 1$ *et* $\mu\lambda_1 + \nu\lambda_2 = 1$*. Elles ont pour solution* $\mu = \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{7}}$ *et* $\nu = \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{7}}$*. On aura donc* $a_n = \mu\lambda_1^n + \nu\lambda_2^n$ *pour ces valeurs. [Les valeurs propres ayant module* $\frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ *et argument* $\pm\arctan(\sqrt{7})$ *où* $\mathrm{Arctan}(\sqrt{7})/2\pi \approx 0.19248 \approx \frac{5}{26}$*, la suite a globalement une croissance* $O((\sqrt{2})^n) = O(2^{n/2})$ *et fait à peu près 5 oscillations complètes tous les 26 termes, ce qu'on peut confirmer par un calcul des termes jusqu'à* $a_{26} = 8279$ *et* $a_{27} = 7917$ *; pour comparaison on a* $2^{26/2} = 2^{13} = 8192$*.]*

Fin.