Corrigé Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire 17 décembre 2010
9h–12h

Si φ est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on notera $\mathrm{subs}_\varphi : K[X] \to \mathrm{End}(E)$ le morphisme d'anneaux qui consiste à substituer φ pour X : $\sum_{i=0}^d c_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^d c_i \varphi^i$ (ailleurs cette opération est souvent notée $P(X) \mapsto P(\varphi)$). En particulier $\mathrm{subs}_\varphi(c) = c\varphi^0 = c\,\mathrm{id}_E$ pour un polynôme constant $c \in K$. On utilisera comme définition du polynôme caractéristique la formule $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (et non pas $\det(A - XI_n)$), de sorte qu'il soit toujours unitaire.

1. On fixe un corps K, un K-espace vectoriel E de dimension finie n, un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(E)$.

a. On choisit un vecteur $v_0 \in E$, et définit des vecteurs v_i pour tout entier $i > 0$ de façon récurrente par $v_i = \varphi(v_{i-1})$. Comme, en vue de leur nombre plus grand que la dimension n, les vecteurs v_i ne peuvent pas être tous linéairement indépendants, il existe une relation de dépendance linéaire $c_0v_0 + \cdots + c_dv_d = 0$ entre les vecteurs $(v_0, \ldots, v_d)$ (avec $d \in \mathbf{N}$ et $c_0, \ldots, c_d \in K$ pas tous nuls). Montrer qu'on a également $c_0v_{0+k} + \cdots + c_dv_{d+k} = 0$ pour tout $k > 0$.

$\surd$ *Cela se montre par récurrence sur k, car application de l'endomorphisme φ à la relation de dépendance $c_0v_{0+k-1} + \cdots + c_dv_{d+k-1} = 0$ donne la relation $c_0v_{0+k} + \cdots + c_dv_{d+k} = \varphi(0) = 0$.*

b. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_0, v_1, \ldots) \subseteq E$. Déduire de la question précédente que si $P \in K[X]$ vérifie $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_0) = 0 \in E$, alors la restriction de $\mathrm{subs}_\varphi(P)$ à F est entièrement nulle.

$\surd$ *Si $P = p_0X^0 + \cdots + p_kX^k$, on a $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_0) = p_0\varphi^0(v_0) + \cdots + p_k\varphi^k(v_0) = p_0v_0 + \cdots + p_kv_k$, donc l'hypothèse $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_0) = 0$ donne une relation de dépendance linéaire $p_0v_0 + \cdots + p_kv_k = 0$. D'après la question précédente on a également $p_0v_{0+k} + \cdots + p_kv_{k+k} = 0$ pour tout $k > 0$, ce qui veut dire $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_k) = 0$, et par linéarité $\mathrm{subs}_\varphi(P)$ annule tout l'espace $F = \mathrm{Vect}(v_0, v_1, \ldots)$.*

c. Soit maintenant $P = c_0X^0 + \cdots + c_{n-1}X^{n-1} + X^n \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n, et supposons que la matrice de φ par rapport à une certaine base $\mathcal{E}$ de E soit égale à la matrice compagnon de P:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En choisissant de façon convenable $v_0 \in E$, montrer que le polynôme minimal de φ et le polynôme caractéristique de φ sont tous les deux égaux à P.

$\surd$ *On va raisonner que P est le polynôme minimal de φ, en montrant que $\mathrm{subs}_\varphi(P)$ annule un certain vecteur v_0 et que $\mathrm{Vect}(v_0, v_1, \ldots) = E$; la question b s'appliquera alors et montre que $\mathrm{subs}_\varphi(P)$ annule E tout entier. On prend pour v_0 le premier vecteur de la base $\mathcal{E}$, et on constate par un simple calcul que $\mathcal{E} = (v_0, \ldots, v_{n-1})$ et donc $F = E$. Or $v_n = \varphi(v_{n-1}) = -c_0v_0 - \cdots - c_{n-1}v_{n-1}$, ce qui donne la relation de dépendance linéaire $c_0v_0 + \cdots + c_{n-1}v_{n-1} + v_n = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{subs}_\varphi(P)(v_0) = 0$, et donc $\mathrm{subs}_\varphi(P) = 0$ d'après la question b. Pour conclure que P est le polynôme minimal de φ il faut encore exclure la possiblilité qu'un polynôme unitaire de plus petit degré annule E. Mais par l'indépendance linéaire de $(v_0, \ldots, v_{n-1})$, aucun polynôme $R \neq 0$ de degré $< n$ ne peut vérifier $\mathrm{subs}_\varphi(R)(v_0) = 0$, et donc certainement pas $\mathrm{subs}_\varphi(R) = 0$. Donc P est le polynôme minimal, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique en est un multiple, mais il est aussi de degré n et unitaire, et donc forcément égal à P.*

d. On spécialise dans la situation de la question précédente $K = \mathbf{R}$, $n = 4$, $E = \mathbf{R}^4$ avec $\mathcal{E}$ sa base canonique, et $P = 1 - X - X^3 + X^4$. Donc en particulier

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = C_{1-X-X^3+X^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre de φ, et trouver sa multiplicité algébrique (c'est-à-dire, comme racine du polynôme caractéristique).

$\surd$ *Les valeurs propres de φ sont les racines de P (soit parce que c'est le polynôme minimal, soit parce que c'est le polynôme caractéristique de φ). En substituant 1 pour X dans P on trouve $1-1-1+1=0$, donc $\lambda=1$ est bien racine de P, donc valeur propre de φ. On a $P/(X-1)=X^3-1$, qui a toujours 1 comme racine, pendant que $P/(X-1)^2=X^2+X+1$ n'a plus 1 comme racine. La multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda=1$ est donc 2. Le polynôme quotient X^2+X+1 est quadratique au discriminant -3 négatif, donc P n'a pas d'autres racines réelles; comme $K=\mathbf{R}$ cela montre que φ n'a pas d'autres valeur propres.*

e. Calculer, pour la valeur propre $\lambda=1$, l'espace propre (c'est-à-dire trouver une base de ce sous-espace), ainsi que l'espace caractéristique (espace propre généralisé), qu'on appellera F_λ.

$\surd$ *Pour l'espace propre, on cherche le noyau de (l'endomorphisme de $E=\mathbf{R}^4$ représenté par) la matrice*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi-\mathrm{id})=C_P-I_4=\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\+1&-1&0&+1\\0&+1&-1&0\\0&0&+1&0\end{pmatrix}=A.$$

Pour $v=(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$ l'équation $A\cdot v=\vec{0}$ donne le système d'équations linéaires $-x-t=0$, $x-y+t=0$, $y-z=0$ et $z=0$, qui a pour solution $\{\,(x,0,0,-x)\mid x\in\mathbf{R}\,\}$, et $((1,0,0,-1))$ est une base de l'espace propre pour $\lambda=1$. Comme on a vu dans la question d, la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme minimal Q est 2, et l'espace caractéristique est donc le noyau de A^2. On a

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix},$$

et l'équation $A^2\cdot v=\vec{0}$ donne le système d'équations linéaires $x-z+t=0$, $-2x+y+z-2t=0$, $x-2y+z+t=0$ et $y-z=0$. Ce système est équivalent à $x-y+t=0$ et $z=y$ (deux équations étant redondantes), et à part du vecteur propre $(1,0,0,-1)$ déjà trouvé, on trouve comme solution indépendante par exemple $(1,1,1,0)$. Ces deux vecteurs forment donc une base de F_λ.

f. Soit Q le quotient de P par $(X-1)^m$, où m est maximal pour que la division soit exacte (sans reste). Donner un argument sans calcul qui montre que $E=F_\lambda\oplus F'$ avec $F'=\mathrm{Ker}(\mathrm{subs}_\varphi(Q))$.

$\surd$ *D'après la question d on a $m=2$ et $Q=X^2+X+1$. Comme $\lambda=1$ n'est pas une racine de Q, les polynômes $(X-1)^2$ et Q sont premiers entre eux, et le théorème de décomposition des noyaux (ou lemme des noyaux) s'applique, et dit que $E=\mathrm{Ker}(\mathrm{subs}_\varphi(P))$ est égal à*

$$\mathrm{Ker}\big(\mathrm{subs}_\varphi((X-1)^2)\big)\oplus\mathrm{Ker}\big(\mathrm{subs}_\varphi(Q)\big)=\mathrm{Ker}((\varphi-\mathrm{id})^2)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}).$$

g. Calculer F' explicitement, et vérifier que l'espace trouvé est en somme directe avec F_λ.

$\surd$ *On a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id})=C_P^2+C_P+I_4=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix},$$

et on trouve comme générateurs de F' par exemple les vecteurs $(1,0,-3,2)$ et $(0,1,-2,1)$. On aurait pu raisonner aussi que $P=(X^2+X+1)(X-1)^2$ étant une factorisation du polynôme minimal P, on a $(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id})(\varphi-\mathrm{id})^2=0$ et chaque vecteur dans l'image de $(\varphi-\mathrm{id})^2$, c'est-à-dire chaque colonne de sa matrice A^2, est dans le noyau de $\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}$, et cela fournit comme base de F' par exemple les deux premières colonnes $(1,-2,1,0)$ et $(0,1,-2,1)$. Pour vérifier que la somme est directe, on pourra par exemple calculer $A^2(\mu(1,0,-3,2)+\nu(0,1,-2,1))=\mu(6,-9,0,3)+\nu(3,-3,-3,3)$ dont on constate facilement que ce n'est nul que si $\mu=\nu=0$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}((\varphi-\mathrm{id})^2)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id})=\{\vec{0}\}$

h. Pour les polynômes Q et $(X-1)^m$ de la question *f*, trouver des coefficients de Bézout, c'est-à-dire des polynômes $S,T\in K[X]$ tels que $SQ+T(X-1)^m=1\in K[X]$.

$\surd$ *On exécute l'algorithme d'Euclide pour Q et $R_0=(X-1)^2=X^2-2X+1$, tout en notant pour chaque reste une expression comme combinaison de Q et de R_0, à coefficients polynomiaux. Le premier reste est $R_1=Q-R_0=3X$, le second est $R_2=R_0+\frac{1}{3}(-X+2)R_1=1$, qui est le pgcd; en termes de Q et de R_0 on a $1=R_0+\frac{1}{3}(-X+2)R_1=R_0+\frac{1}{3}(-X+2)(Q-R_0)=\frac{1}{3}((-X+2)Q+(X+1)R_0)$, donc $S=\frac{1}{3}(-X+2)$ et $T=\frac{1}{3}(X+1)$.*

i. Montrer que les endomorphismes $\mathrm{subs}_\varphi(SQ)$ et $\mathrm{subs}_\varphi(T(X-1)^m)$ sont les projections de E selon la somme directe $E = F_\lambda \oplus F'$, et calculer leurs matrices dans $\mathcal{E}$.

$\surd$ *Comme $\mathrm{subs}_\varphi(Q)$ s'annule sur F', c'est aussi le cas de $\varphi_1 = \mathrm{subs}_\varphi(SQ) = \mathrm{subs}_\varphi(S) \circ \mathrm{subs}_\varphi(Q)$, et pour des raisons similaires $\varphi_2 = \mathrm{subs}_\varphi(T(X-1)^2)$ s'annule sur F_λ. Comme $\varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{id}_E$, la restriction de chaque φ_i à la composante de la somme $F_\lambda \oplus F'$ où l'autre s'annule est égale à l'identité de cette composante. Du coup φ_1 coïncide sur chacune des composantes avec la projection sur F_λ, et par linéarité on a égalité sur E tout entier, et de façon similaire φ_2 coïncide partout avec la projection sur l'autre facteur F'. Concrètement $\varphi_1 = \frac{1}{3}(-\varphi + 2\,\mathrm{id})(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}) = \frac{1}{3}(-\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi + 2\,\mathrm{id})$ et $\varphi_2 = \frac{1}{3}(\varphi + \mathrm{id})(\varphi^2 - 2\varphi + \mathrm{id}) = \frac{1}{3}(\varphi^3 - \varphi^2 - \varphi + \mathrm{id})$. Ainsi on a (après calcul de C_P^2 et C_P^3)*

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(\varphi_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Mat}_\mathcal{E}(\varphi_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

j. Donner une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\varphi)$ soit de la forme en blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ où A et B sont des matrices carrées 2×2 qu'on précisera, avec en plus A triangulaire supérieure et B une matrice compagnon (d'un polynôme unitaire de degré 2). [Indication: on pourra considérer le polynôme caractéristique de $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ en relation avec les polynômes caractéristiques de A et de B.]

$\surd$ *Le polynôme caractéristique de $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ est d'une part le polynôme caractéristique P de φ, et d'autre part le produit des polynômes caractéristiques de A et de B. Or, comme A est triangulaire, son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbf{R}$) de degré 2, donc c'est forcément $(X-1)^2$. Pour le polynôme caractéristique de B il reste le quotient $Q = P/(X-1)^2 = X^2 + X + 1$, et si B doit être une matrice compagnon, c'est celle de ce polynôme (cf. question c), donc $B = C_{X^2+X+1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Appelons $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Pour que A soit triangulaire supérieure il faut prendre pour b_1 un vecteur propre pour $\lambda = 1$, disons $b_1 = (1,0,0,-1)$, et b_2 complétera l'espace caractéristique; on peut prendre $b_2 = (1,1,1,0)$ (cf. question e). Pour ces choix aura $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (les coefficients diagonaux sont toujours 1, mais selon le choix de b_2 le coefficient $A_{1,2}$ peut être un autre scalaire non nul). On doit avoir $\mathrm{Vect}(b_3, b_4) = \mathrm{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}) = F'$, et tout ce qui reste à faire c'est d'assurer que $b_4 = \varphi(b_3)$ comme le veut la matrice compagnon B. Comme F' ne contient pas de vecteurs propres, on pourra choisir b_3 non nul dans F' comme on veut, et $\varphi(b_3) \in F'$ en sera linéairement indépendant; par exemple on peut choisir $b_3 = (1,-2,1,0)$ et $b_4 = (0,1,-2,1)$.*

2. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{E}$, et $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{E}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est diagonalisable, et expliciter une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation et la forme diagonale $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$ sur cette base.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique se calcule facilement, notamment parce que, grâce aux deux coefficients 0, le déterminant se factorise en un facteur linéaire et un déterminant 2×2: on obtient $(X-3)\det\left(\begin{smallmatrix} X-12 & 30 \\ -4 & X+10 \end{smallmatrix}\right) = (X-3)(X^2 - 2X) = (X-3)X(X-2)$, et les valeurs propres sont donc 3, 0 et 2. Comme le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, f est certainement diagonalisable. Pour $\lambda = 3$ on voit tout de suite que $(1,0,0)_\mathcal{E}$ est un vecteur propre, et pour $\lambda = 0$ le vecteur propre (générateur de $\mathrm{Ker}(f)$) se trouve aussi presque par inspection: $(0,5,2)_\mathcal{E}$. Il reste $\lambda = 2$, où on trouve après un court calcul $(1,3,1)_\mathcal{E} \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$. Donc une base de diagonalisation est $\mathcal{B} = \big((1,0,0)_\mathcal{E}, (0,5,2)_\mathcal{E}, (1,3,1)_\mathcal{E}\big)$, avec pour forme diagonale*

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. On considère le problème de trouver les $g \in \mathrm{End}(E)$ tels que $g^3 = f$. Montrer que pour un tel g, s'il existe, tout espace propre de f sera g-stable.

√ *Si v est un vecteur propre de $f = g^3$ pour la valeur propre λ, on aura $f(g(v)) = g^3(g(v)) = g^4(v) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$, donc $g(v)$ sera aussi dans l'espace propre de f pour λ (on n'exclut pas $g(v) = 0$, d'où la formulation prudente). En fait ce n'est qu'un cas particulier du fait général qui si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ commutent (ce qui est le cas ici), alors les espaces propres de f sont g-stables (on remarque que c'est $f(g(v)) = g(f(v))$ la partie essentielle dans le raisonnement ci-dessus).*

c. Qu'est-ce que cela entraîne pour la forme de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$? Trouver les solutions g de $g^3 = f$ en donnant leurs matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ (on ne demande pas de les exprimer dans la base $\mathcal{E}$).

√ *Comme chaque espace propre de f est engendré par un seul vecteur de la base $\mathcal{B}$, et cet espace est g-stable, ce vecteur est nécessairement aussi un vecteur propre de g. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est diagonale, et la matrice de $f = g^3$ en est obtenue en enlevant les coefficients diagonaux à la puissance 3. En vue de la valeur donnée de cette matrice, et le fait que les coefficients de g sont réels, il existe une unique solution pour g, avec*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Ce n'était pas demandé, mais voici la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$, son inverse P^{-1}, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)P^{-1}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 2(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}) & 5(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \\ 0 & 6\sqrt[3]{3} & -30\sqrt[3]{2} \\ 0 & 2\sqrt[3]{3} & -5\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

3. Soit E l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (c'est-à-dire indéfiniment dérivables $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$) qui vérifient l'équation différentielle homogène

$$f''' + f' + 10f = 0;$$

c'est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (on l'admet).

a. Montrer que si $f \in E$ alors aussi $f' \in E$.

√ *En dérivant l'équation différentielle $f''' + f' + 10f = 0$ on trouve $f^{(4)} + f'' + 10f' = 0$, donc f' vérifie donc la même équation différentielle.*

On peut donc considérer l'endomorphisme $D \in \mathrm{End}(E)$ défini par $D : f \mapsto f'$.

b. Donner une équation en $\lambda \in \mathbf{C}$ qui est vérifiée si et seulement si la fonction exponentielle $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ appartient à E. Montrer que dans ce cas f_λ est un vecteur propre de D pour λ.

√ *On a $D(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ ce qui montre déjà que f_λ sera un vecteur propre de D pour λ s'il appartient à E. L'équation différentielle donne $\lambda^3 f_\lambda + \lambda f_\lambda + 10 f_\lambda = 0$, et comme f_λ n'est pas la fonction nulle, cette condition est vérifiée si et seulement si $\lambda^3 + \lambda + 10 = 0$.*

c. Montrer qui si un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ (donc à coefficients entiers) possède une racine dans $\mathbf{Z}$, alors cette racine divise nécessairement (dans $\mathbf{Z}$) le coefficient constant (c'est-à-dire de X^0) de P.

√ *Si $n \in \mathbf{Z}$ est racine de $P = \sum_{i=0}^{d} c_i X^i$, alors $0 = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i \equiv c_0 \pmod{n}$, donc n divise c_0.*

d. Trouver les solutions entières $\lambda \in \mathbf{Z}$ de l'équation de la question *b*, et en déduire toutes les solutions dans $\mathbf{C}$.

√ *D'après la question précédente les seuls candidats pour une solution $\lambda \in \mathbf{Z}$ de l'équation sont les diviseurs de 10 dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10$. On vérifie facilement que parmi ces candidats la seule racine est $\lambda = -2$. La division $(\lambda^3 + \lambda + 10)/(\lambda + 2)$ donne comme quotient (exact) $\lambda^2 - 2\lambda + 5$. Les solutions dans $\mathbf{C}$ de $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ sont $-1 \pm \sqrt{-4}$, c'est-à-dire $1 + 2\mathbf{i}$ et $1 - 2\mathbf{i}$.*

e. Trouver le polynôme minimal P de D, et en déduire si D est diagonalisable on non.

$\surd$ *L'équation différentielle donne* $(D^3 + D + 10\,\mathrm{id})(f) = 0$ *pour tout* $f \in E$*, et par conséquent* $\mathrm{subs}_D(X^3 + X + 10) = 0 \in \mathrm{End}(E)$. *Or on a vu qu'il existe au 3 valeurs propres distinctes de* D*, donc le polynôme minimal (ayant ces valeurs propres comme racines) est au moins de degré 3, et du coup on doit avoir* $P = X^3 + X + 10$. *Comme ce polynôme est scindé sur* $\mathbf{C}$*, et ses trois racines trouvées dans la question d sont distinctes,* D *est diagonalisable.*

En analyse on établit que toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, vérifiant l'équation $f' = \lambda f$ est un multiple scalaire de la fonction exponentielle indiquée dans la question *b*. On admet ici ce résultat; autrement dit, on admet que les espaces propres de D sont de dimension 1.

f. Déterminer $\dim(E)$. Quel est le polynôme caractéristique de D ?

$\surd$ *Comme* D *est diagonalisable,* $\dim(E)$ *est la somme des dimensions des espaces propres, c'est-à-dire 3. Le polynôme caractéristique de* D *est donc de degré* 3*, et égal au polynôme minimal* P.

g. Spécifier trois fonctions $g_1, g_2, g_3 \in E$ qui sont linéairement indépendantes, et qui sont à valeurs *réelles* (donc $g_i(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$). Qu'est-ce qu'on peut en déduire concernant les solutions de la même équation différentielle $f''' + f' + 10f = 0$ dans l'ensemble $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions réelles et indéfiniment dérivables (quel ensemble est en fait un $\mathbf{R}$-espace vectoriel) ?

$\surd$ *On peut prendre des combinaisons* $\mathbf{C}$*-linéaires convenables* $af_{-2} + bf_{1+2\mathbf{i}} + cf_{1-2\mathbf{i}}$*, qui seront linéairement indépendantes si leurs* 3*-uplets* (a, b, c) *le sont. On peut prendre* $g_1 = f_{-2}$ *qui est déjà à valeurs réelles, mais* $f_{1+2\mathbf{i}}$ *et* $f_{1-2\mathbf{i}}$ *ne le sont pas : ce sont des fonctions* $\exp((2+\mathbf{i})x)$ *et* $\exp((2-\mathbf{i})x)$ *conjuguées complexes l'une de l'autre. Cette circonstance permet de former leurs "parties réelles et imaginaires" comme des combinaisons linéaires :* $g_2 = \frac{f_{1+2\mathrm{i}}+f_{1-2\mathrm{i}}}{2}$ *et* $g_3 = \frac{f_{1+2\mathrm{i}}-f_{1-2\mathrm{i}}}{2\mathbf{i}}$. *On peut remarquer que par les expressions des fonctions trigonométriques en termes d'exponentielles complexes, ces deux fonctions sont* $g_2 : x \mapsto e^x \cos(2x)$ *et* $g_3 : x \mapsto e^x \sin(2x)$. *Ces fonctions sont dans* $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *et elles sont évidemment* $\mathbf{R}$*-linéairement indépendantes. Les solutions de l'équation différentielle dans cet espace forment donc un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de dimension au moins* 3. *En fait sa dimension est exactement* 3 *(et on a donc en trouvé une base), car on peut montrer que si on avait plus de* 3 *fonctions* $\mathbf{R}$*-linéairement indépendantes dans cet espace, elles seraient aussi* $\mathbf{C}$*-linéairement indépendantes (c'est à cause du fait qu'elles sont à valeurs réelles), ce qui contredirait la dimension de l'espace complexe* E *trouvé à la question f.*

Fin.