

Etude d'un problème d'évolution de surface cylindrique dans le cas axisymétrique

M. Boutat¹, Y. D'Angelo², S. Hilout³, V. Lods¹

Abstract

The aim of the paper is the mathematical study of a surface evolution problem in the cylindrical case. The physical configuration consists in an axisymmetric stressed pore channel as described in *Acta mater.*, **45**, 9, (1997) 3835–3841. When axial stress is applied, morphological instabilities may appear at the vacuum/material interface. Under the axial symmetry envisaged, the radius $r(z, \tau)$ of the pore channel satisfies a nonlinear evolution equation. Under some formal asymptotic assumptions as in *Asymp. Anal.* 38 (2004) 93–128), we obtain a parabolic 4th-order PDE. Local existence and uniqueness of the solution is established and numerical results showing either a dissipative behaviour or pinch-off of the solution (depending on initial condition and value of the parameter η) are obtained.

Résumé Le but de ce travail est l'étude mathématique d'un problème d'évolution de surface d'un pore à symétrie cylindrique contraint dans la direction axiale. Nous utilisons le modèle développé dans *Acta mater.*, **45**, 9, (1997) 3835–3841. Sous la contrainte, des instabilités de surface apparaissent à l'interface vide/matière et le rayon $r(z, \tau)$ du pore cylindrique vérifie une équation d'évolution non linéaire. Sous des hypothèses asymptotiques formelles (comme dans *Asymp. Anal.* 38 (2004) 93–128), on obtient une EDP parabolique du 4-ième ordre. On établit l'existence locale et l'unicité de la solution et on montre des résultats numériques conduisant, selon le profil initial et la valeur du paramètre η , ou bien à une dissipation rapide des perturbations initiales, ou bien à un pincement. Ces résultats sont en accord qualitatif avec d'autres modèles de la littérature.

1 Introduction

On s'intéresse à un pore cylindrique soumis à des contraintes (cf. figure 1) et en particulier aux instabilités morphologiques susceptibles d'apparaître à l'interface vide/matière lorsque le cylindre est sous contrainte extérieure à symétrie axiale.

¹Laboratoire d'Applications des Mathématiques, Université de Poitiers, Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France, e-mail: mohamed.boutat@math.univ-poitiers.fr (M. Boutat) & vlods@free.fr (V. Lods)

²Laboratoire de Combustion et de Détonique, UPR 9028 CNRS, ENSMA, BP 109, 86960 Futuroscope, France, e-mail: dangelo@lcd.ensma.fr

³Département de Mathématiques Appliquées et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, BP 523, 23000 Béni-Mellal, Maroc, e-mail: said_hilout@yahoo.fr

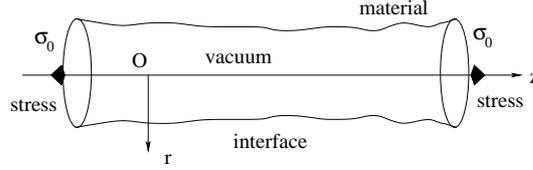


Figure 1: Interface vide/matière d'un pore à symétrie cylindrique, soumis à une contrainte extérieure axiale σ_0 .

L'équation d'évolution de la surface du pore (supposé de révolution), contraint par des forces de même axe de symétrie s'écrit [9] :

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = D(1 + r_z^2)^{\frac{1}{2}} \nabla_s^2 (\mathcal{E} + \gamma K) \quad (1)$$

où $r = r(\theta, z, t)$ est le rayon du cylindre, fonction du temps t , de l'angle polaire θ et de la coordonnée axiale z ; $r_X \equiv \partial r / \partial X$ avec $X \equiv \theta, z$ ou t ; ∇_s^2 désigne le Laplacien surfacique [2] défini par :

$$\nabla_s^2 = \frac{1}{q} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r^2 + r_\theta^2}{q} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{r_z r_\theta}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 + r_z^2}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{r_z r_\theta}{q} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \quad (2)$$

avec

$$q = \sqrt{r^2(1 + r_z^2) + r_\theta^2}; \quad r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta};$$

\mathcal{K} désigne la courbure totale $\mathcal{K} = \kappa_1 + \kappa_2$ somme des deux courbures $\kappa_1 = (r\sqrt{1 + r_z^2})^{-1}$ et $\kappa_2 = -r_{zz}(1 + r_z^2)^{-3/2}$; D est le coefficient de diffusion des atomes à la surface (qui dépend de la température); γ est l'énergie libre de la surface ; \mathcal{E} est l'énergie élastique de la structure définie en tout point de $\Omega_{r(\tau)}$ où $\Omega_{r(\tau)}$ est la partie occupée par le cylindre (vide) de rayon R_0 et de hauteur ℓ , et dont la frontière et les surfaces latérales sont données par :

$$\Gamma_r = \{(r, z) : r = \tilde{r}(z, \tau) \equiv r(z, \tau) \text{ par abus de notation}\};$$

$$\Gamma_0 = \{(r, z), z = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \{(r, z), z = \ell\}.$$

Pour étudier l'évolution de la surface du film, nous utilisons un système de coordonnées cylindriques (r, z, θ) avec (oz) comme axe de révolution. L'axisymétrie nous permet d'écrire le rayon r seulement comme fonction de z et de τ : $r = r(z, \tau)$ et $r_\theta = 0$. Nous supposons que κ_1 est négligeable devant κ_2 , l'équation (1) devient :

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{r}{\sqrt{1 + r_z^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{-r_{zz}}{(1 + r_z^2)^{3/2}} + \mathcal{E} \right) \right]. \quad (3)$$

L'axe (oz) est supposé axe de révolution puisqu'on est dans le cas axisymétrique implique que le déplacement tangentiel u_θ est nul en tout point du cylindre. Pour les mêmes raisons de symétrie, nous avons $\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{z\theta} = 0$ et les contraintes de cisaillement $\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$. La loi

de Hooke permet de calculer les contraintes en fonction des déformations [1]. Pour simplifier, nous introduisons les changements d'échelles suivants $R = r$; $Z = \alpha z$ et $t = D\gamma\alpha^4\tau$. Nous supposons que $\alpha = R_0/\ell$ est petit. Nous cherchons les déplacements u_z et u_r de la forme suivante $u_z(r, z) = \alpha U_3(R, Z)$; $u_r(r, z) = U_1(R, Z)$. Il s'agit donc d'étudier le comportement de $h(t, Z) = r(\tau, z)$.

Des calculs (voir [3, 5]) nous permettent d'écrire l'équation (3) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial Z} \left[h \frac{\partial}{\partial Z} \left((1 - \eta \ln(h)) h_{ZZ} - \frac{\eta}{2} h^{-2} h_Z^2 \right) \right]. \quad (4)$$

avec $\eta \equiv \sigma_0^2/\mu\gamma$. Dans la suite, pour alléger les notations, nous considérons la variable spatiale z à la place de la variable Z et nous effectuons le changement de variable $h(t, z) = e^{\frac{1}{\eta} + \varphi(t, z)}$. L'équation (4) devient sous la forme simplifiée :

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Lambda(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}) \quad (5)$$

où:

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}) = & \varphi\varphi^{(4)} + 2\varphi'\varphi^{(3)} + \varphi''^2 + 8\varphi'^2\varphi'' + 5\varphi\varphi'\varphi^{(3)} + 3\varphi\varphi''^2 + \\ & 9\varphi\varphi'^2\varphi'' + 3\varphi'^4 + 2\varphi\varphi'^4 + e^{-\left(\frac{1}{\eta} + \varphi\right)} \left(\varphi'\varphi^{(3)} + \varphi'^2\varphi'' + \varphi''^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Nous considérons ensuite le problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Lambda(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}) \text{ sur }]0, T[\times (0, 1) \\ \varphi(t, \cdot) \text{ est une fonction périodique sur } (0, 1) \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi_0 > 0 \text{ est une fonction périodique donnée sur } (0, 1) \end{cases} \quad (7)$$

avec $\varphi^{(k)}(t, z) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k}(t, z)$.

Nous considérons l'espace \mathcal{H} défini par $\mathcal{H} = L^2(0, t_*; H_{per}^4(0, 1)) \cap L^\infty(0, t_*; H_{per}^2(0, 1))$ muni de la norme :

$$\| \varphi \|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^{t_*} \int_0^1 \varphi^{(4)2}(t, z) dz dt + \sup_{t \in (0, t_*)} \left[\int_0^1 \varphi''^2(t, z) dz + \int_0^1 \varphi^2(t, z) dz \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note $B_{\mathcal{H}}(0, \xi)$ la boule fermée de \mathcal{H} de centre 0 et de rayon ξ .

2 Existence locale

Dans cette section, nous donnons des résultats d'existence locale et d'unicité de la solution de (7). Pour cela, nous utilisons le théorème du point fixe de Picard [6]. le rayon ξ , le temps t_* sont calculés en fonction de la donnée initiale φ_0 .

Nous considérons l'application Γ de \mathcal{H} dans \mathcal{H} , donnée, pour tout $v \in \mathcal{H}$ par : $\Gamma(v) = \varphi$ avec φ solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Pi(\varphi, \varphi^{(4)}, v, v', v'', v^{(3)}, v^{(4)}) \text{ sur }]0, T[\times (0, 1) \\ \varphi(t, \cdot) \text{ est une fonction périodique sur } (0, 1) \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi_0 > 0 \text{ est une fonction périodique donnée sur } (0, 1) \end{cases} \quad (8)$$

où :

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, \varphi^{(4)}, v, v', v'', v^{(3)}, v^{(4)}) &= v\varphi^{(4)} + 2v'v^{(3)} + v''^2 + 8v'^2v'' + 5vv'v^{(3)} + 3vv''^2 + 9vv'^2v'' + 3v'^4 \\ &\quad + 2vv'^4 + e^{-\left(\frac{1}{\eta} + \varphi\right)} \left(v'v^{(3)} + v'^2v'' + v''^2 \right) - \varphi^{(4)} + v^{(4)} - \varphi + v \end{aligned} \quad (9)$$

Le résultat d'existence locale et d'unicité de la solution du problème (7) est le suivant :

Theorem 2.1 *Pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H_{per}^4(0, 1)$ strictement positive qui vérifie $\|\varphi_0\|_{H_{per}^4(0,1)} \leq \xi$, le problème (7) admet une et une seule solution locale $\left([0, t_*), \varphi\right)$ avec :*

$$\varphi \in L^2(0, t_*; H_{per}^4(0, 1)) \cap L^\infty(0, t_*; H_{per}^2(0, 1)).$$

Le théorème 2.1 repose sur les deux lemmes suivants :

Lemma 2.1 *Sous les mêmes conditions du théorème 2.1, il existe une constante $c > 0$ telle que pour $t_* > 0$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} 1 - 19\eta(\xi^2 + \xi) - 2\xi - \eta\xi \geq \frac{1}{2} \\ 4t_*c\eta \left[9\xi^9 + 12\xi^8 + 8\xi^7 + 3\xi^6 + 3\xi^4 + 11\xi^3 + 15\xi^2 + 3\xi \right] + 8t_*\xi + \|\varphi_0\|_{H_{per}^2(0,1)}^2 \leq \xi^2, \end{cases}$$

l'application Γ est bien définie de $B_{\mathcal{H}}(0, \xi)$ dans $B_{\mathcal{H}}(0, \xi)$.

Lemma 2.2 *Sous les mêmes conditions du théorème 2.1, il existe une constante $0 < k < 1$ telle que pour tout v_1, v_2 dans $B_{\mathcal{H}}(0, \xi)$, l'application Γ vérifie :*

$$\|\Gamma(v_1) - \Gamma(v_2)\| \leq k \|v_1 - v_2\|.$$

Les détails des démonstrations sont donnés dans [3].

3 Illustrations numériques

L'équation 4 peut se mettre sous la forme $\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{L}(h) = \mathcal{N}(h)$. Ce type d'équation peut être approchée numériquement par une méthode pseudo-spectrale, couplée à un schéma temporel

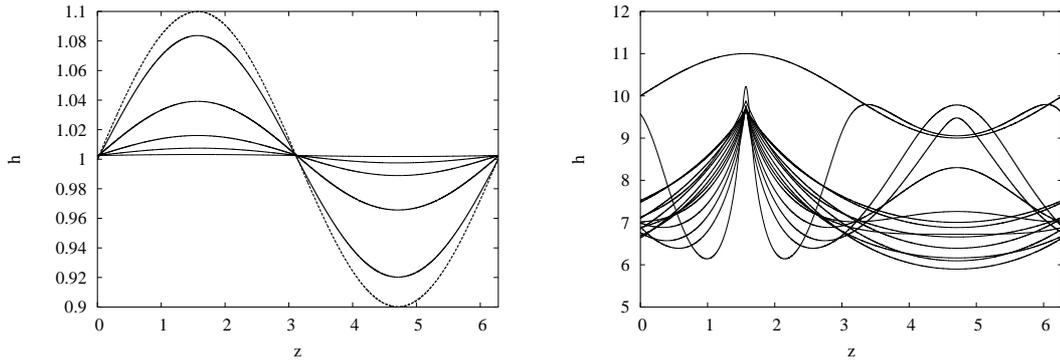


Figure 2: A gauche : Solution $h(z, t)$ de l'équation (4), avec la condition initiale $h_0(z) = 1 + 0.1 \sin(z)$ et pour $\eta = 1$; le pas de temps utilisé pour la simulation vaut $\delta t = 10^{-3}$ et le nombre de points de colocation $N = 8192$. La solution est représentée aux instants 0 (condition initiale, en ligne pointillée), 0.2, 1, 2, 3, 5. A droite : Solution $h(z, t)$ de l'équation (4), avec la condition initiale $h_0(z) = 10 + \sin(z)$ et pour $\eta = 0.44$; le pas de temps utilisé pour la simulation vaut $\delta t = 10^{-2}$ et le nombre de points de colocation $N = 8192$. La solution est représentée aux instants 0 (condition initiale, en ligne pointillée), 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 40, 60, 80, 120, 150 et 178. La discontinuité effective de la dérivée de la forme (aux temps longs) est caractéristique du comportement en pincement.

de type exponentiel (*ETD schemes*, cf. [10, 11, 12]) Bien que ces schémas — de type Runge–Kutta — aient été développés jusqu'au 4-ième ordre, nous nous limiterons au premier ordre en temps, dans la présente étude qualitative.

Nous montrons d'abord un exemple de dissipation (figure 2, gauche), puis un exemple de comportement en pincement (figure 2, droite), suivant la condition initiale h_0 et la valeur du paramètre η . Ces résultats sont qualitativement similaires à ceux de la littérature, obtenus par ex. pour des modèles sans contraintes (cf. e.g. [8]). D'autres comparaisons peuvent être trouvées dans [3].

References

- [1] D. Bellet, J.J. Barreau, Cours d'élasticité, Cepadues–éditions, (1990).
- [2] A.J. Bernoff, A.L. Bertozzi, T.P. Witelski, Axisymmetric surface diffusion: dynamics and stability of self–similar pinch–off, *J. Stast. Phys.*, 93, (1998), p. 725–776.
- [3] M. Boutat, Y. D'Angelo, S. Hilout, V. Lods, An interface evolution problem for axisymmetric stressed pore channels: existence, unicity and pinch–off, soumis à *Asymptotic analysis*.

- [4] M. Boutat, Y. D'Angelo, S. Hilout, V. Lods, Explosion en temps fini de la solution d'un problème d'évolution de surface de film mince, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 337, (2003), p. 549–552.
- [5] M. Boutat, Y. D'Angelo, S. Hilout, V. Lods Existence and finite-time blow-up for the solution to a thin-film surface evolution problem, *Asymptotic Analysis*, 38(2), (2004), p. 93–128.
- [6] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [7] B.D. Coleman, R.S. Falk, M. Moakher, Stability of cylindrical bodies in the theory of surface diffusion, *Physica D*, 89, (1995), p. 123–135.
- [8] B.D. Coleman, R.S. Falk, M. Moakher, Space-time finite element methods for surface diffusion with applications to the theory of the stability of cylinders, *SIAM J. Sci. Comp.*, 17, 6, (1996), p. 1434–1448.
- [9] J. Colin, J. Grillé, N. Junqua, Morphological instabilities of a stressed pore channel, *Acta Materialia*, 45, (1997), p. 3835–3841.
- [10] Y. D'Angelo, G. Joulin, G. Boury, On model evolution equation for the whole surface of 3D expanding wrinkled premixed flames, *Combustion Theory & Modelling*, 4, (2000), p. 317–338.
- [11] Gregory Beylkin, James M. Keiser and Lev Vozovoi, A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear PDEs, *Journal of Computational Physics*, Volume 147 , Issue 2 , (1998), pp. 362 – 387.
- [12] M. Cox and P. C. Matthews, Exponential time differencing for stiff systems, *Journal of Computational Physics*, 176 (2002), pp. 430–455.
- [13] S.A. Orszag, Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I. Galerkin (spectral) representations, *Stud. Appl. Math.*, 50, (1971), p. 293-327.